Desigualdades Cuadráticas y Racionales
MATE 3011

Material Suplementario Para el Curso Métodos Cuantitativos 1

Este suplemento tiene el propósito de mostrar como resolver desigualdades que contienen una expresión cuadrática o una expresión racional. Los métodos que presentaremos difieren de los desarrollados para resolver desigualdades lineales y desigualdades con valor absoluto. Como parte del proceso de resolver la desigualdad cuadrática la rearreglaremos para que un lado sea igual a cero. Luego factorizaremos la expresión cuadrática que se obtiene.

Ejemplo 1. *Resuelva la desigualdad* $x^2 + x - 2 > 0$.

SOLUCIÓN. Comenzamos factorizando la expresión cuadrática pues uno de los lados es igual a cero.

$$x^2 + x - 2 > 0$$

$$(x+2)(x-1) > 0$$

Ahora resolvemos la ecuación $(x+2)(x-1) = 0$. Tenemos que

$$x + 2 = 0 \text{ o } x - 1 = 0.$$

Obtenemos que $x = -2$ o $x = 1$. Estos valores dividen la recta real en tres intervalos: $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, \infty)$. Sabemos que $x = -2$ y en $x = 1$ satisfacen la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$. Deseamos determinar el signo de la espresión $x^2 + x - 2$ en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, \infty)$. Para esto determinamos el signo de cada uno de los factores usando un valor de x en cada uno de los intervalos. Este valor particular de x se conoce como valor prueba. Por ejemplo, para determinar el signo del factor $x - 2$ en el intervalo $(-\infty, -2)$ escogemos un valor de x que este en este intervalo, digamos $x = -3$ y lo subustituimos en $x - 2$. Obtenemos $x - 2 = -3 - 2 = -5$. Luego $x - 2$ es negativo en el intervalo $(-\infty, -2)$. Por otro lado $x - 1 = -3 - 1 = -4$ por lo que $x - 1$ es negativo en el intervalo $(-\infty, -2)$. Repetimos este procedimiento para los otros dos intervalos. Construimos una tabla, llamada una **tabla de signos**, para organizar la información obtenida:

Intervalos	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $x+2$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x-1$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x+2)(x-1)$	$+$	$-$	$+$

El signo de $(x+2)(x-1)$ se obtiene multiplicando el signo de $x - 2$ con el signo de $x + 1$. Nos interesa saber donde $(x+2)(x-1) > 0$, es decir donde $(x+2)(x-1)$ es positiva. Esto ocurre en $(-\infty, -2)$ o en $(1, \infty)$. $\square$

Ejemplo 2. *Resuelva la desigualdad* $x^2 \leq 4x + 12$.

SOLUCIÓN. Primero despejemos para que un lado de la desigualdad sea cero y factoricemos la expresión resultante:

$$\begin{aligned} x^2 &\leq 4x + 12 \\ x^2 - 4x - 12 &\leq 0 \\ (x+2)(x-6) &\leq 0. \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación $(x+2)(x-6) = 0$. Obtenemos que $x + 2 = 0$ o $x - 6 = 0$. Luego $x = -2$ o $x = 6$. Ahora construimos una tabla de signos.

Intervalos	$(-\infty, -2)$	$(-2, 6)$	$(6, \infty)$
Signo de $x + 2$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 6$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x+2)(x-6)$	$+$	$-$	$+$

Buscamos todos los valores de x tales que $(x+2)(x-6) \leq 0$. $(x+2)(x-6)$ es menor que cero en el intervalo $(-2, 6)$ e igual a cero en $x = -2$ y en $x = 6$. Luego la solución de la desigualdad es el intervalo $[-2, 6]$. □

Ejemplo 3. *Resuelva la desigualdad* $x^2 < 3x$.

SOLUCIÓN. Primero despejemos para que un lado de la desigualdad sea cero y factoricemos la expresión resultante:

$$\begin{aligned} x^2 &< 3x \\ x^2 - 3x &< 0 \\ x(x-3) &< 0. \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación $x(x-3) = 0$. Obtenemos que $x = 0$ o $x - 3 = 0$ de donde se sigue que $x = 0$ o $x = 3$. Ahora construimos una tabla de signos.

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de x	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo de $x(x-3)$	$+$	$-$	$+$

Buscamos todos los valores de x tales que $x(x-3) < 0$. Esto ocurre en $(0, 3)$. $\square$

Ejemplo 4. *Resuelva la desigualdad* $4x^2 + 8x \geq 5$.

SOLUCIÓN. Primero despejemos para que un lado de la desigualdad sea cero y factoricemos la expresión resultante:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x &\geq 5 \\ 4x^2 + 8x - 5 &\leq 0 \\ (2x+5)(2x-1) &\leq 0. \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación $(2x+5)(2x-1) = 0$. Obtenemos que $2x+5 = 0$ o $2x-1 = 0$. Luego $x = -\frac{5}{2}$ o $x = \frac{1}{2}$. Ahora construimos una tabla de signos.

Intervalos	$(-\infty, -\frac{5}{2})$	$(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \infty)$
Signo de $2x + 5$	$-$	$+$	$+$
Signo de $2x - 1$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(2x+5)(2x-1)$	$+$	$-$	$+$

Buscamos todos los valores de x tales que $(2x+5)(2x-1) \geq 0$. $(2x+5)(2x-1)$ es mayor que cero en el intervalo $(-\infty, -\frac{5}{2})$ e igual a cero en $x = \frac{1}{2}$ y en $x = -\frac{5}{2}$. Luego la solución de la desigualdad es $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. $\square$

Ahora nos concentraremos en desigualdades racionales.

Ejemplo 5. *Resuelva la desigualdad* $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$.

SOLUCIÓN. Primero determinemos donde el numerador es cero.

$$\begin{aligned} x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Segundo, determinemos donde el denominador es cero.

$$\begin{aligned} x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Utilizando estos números dividimos la recta real en tres intervalos:

$$(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty).$$

Ahora construimos una tabla de signos.

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $x + 1$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 1$	$-$	$-$	$+$
Signo de $\dfrac{x+1}{x-1}$	$+$	$-$	$+$

Buscamos todos los valores de x tales que $\frac{x+1}{x-1} > 0$. Luego la solución de la desigualdad es $(-\infty, -1)$ o $(1, \infty)$.

$\square$

Ejemplo 6. *Resuelva la desigualdad* $\dfrac{x-3}{x+1} \leq 0.$

SOLUCIÓN. Primero determinemos donde el numerador es cero.

$$\begin{aligned} x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Segundo, determinemos donde el denominador es cero.

$$\begin{aligned} x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Utilizando estos números dividimos la recta real en tres intervalos:

$$(-\infty, -1), (-1, 3), (3, \infty).$$

Ahora construimos una tabla de signos.

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo de $x + 1$	$-$	$+$	$+$
Signo de $\dfrac{x-3}{x+1}$	$+$	$-$	$+$

Buscamos todos los valores de x tales que $\frac{x-3}{x+1} \leq 0$. Debido a que la desigualdad envuelve una expresión racional debemos ser cuidadosos al determinar la solución. La expresión $\frac{x-3}{x+1}$ es menor que cero en el intervalo $(-1, 3)$. Veamos si en alguno de los extremos es cero. En $x = 3$ tenemos

$$\frac{x-3}{x+1} = \frac{3-3}{3+1} = \frac{0}{4} = 0$$

Luego incluimos $x = 4$ en la solución. Ahora revisemos si en $x = -1$ la expresión $\frac{x-3}{x+1}$ es cero.

$$\frac{x-3}{x+1} = \frac{-1-3}{-1+1} = \frac{-4}{0}$$

Tenemos una división por cero. Luego en $x = -1$ la expresión $\frac{x-3}{x+1}$ no esta definida por lo que no puede ser cero. Concluimos que la solución de la desigualdad $\frac{x-3}{x+1} \leq 0$ es el intervalo $(-1, 3]$. $\square$

Ejemplo 7. *Resuelva la desigualdad* $-\dfrac{2x-1}{x-5} \leq 0$.

SOLUCIÓN. Primero multipliquemos por -1 a ambos lados de la desigualdad para eliminar el negativo del lado izquierdo. Obtenemos

$$\frac{2x-1}{x-5} \geq 0.$$

Determinemos donde el numerador es cero.

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 0 \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ahora determinemos donde el denominador es cero.

$$\begin{aligned} x - 5 &= 0 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Utilizando estos números dividimos la recta real en tres intervalos:

$$(-\infty, 1/2), (1/2, 5), (5, \infty).$$

Ahora construimos la tabla de signos.

Intervalos	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 5)$	$(5, \infty)$
Signo de $2x - 1$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 5$	$-$	$-$	$+$
Signo de $\dfrac{2x-1}{x-5}$	$+$	$-$	$+$

Buscamos todos los valores de x tales que $\dfrac{2x-1}{x-5} \geq 0$. Como en el ejemplo anterior, debemos ser cuidadosos al determinar la solución. Primero la expresión $\dfrac{2x-1}{x-5}$ es mayor que cero en los intervalos $(-\infty, \frac{1}{2})$ y $(5, \infty)$. Veamos si en alguno de los extremos es cero. En $x = \frac{1}{2}$ tenemos

$$\frac{2x-1}{x-5} = \frac{2(\frac{1}{2}) - 1}{\frac{1}{2} - 5} = \frac{1-1}{-\frac{9}{2}} = \frac{0}{-\frac{9}{2}} = 0$$

Luego incluimos $x = \frac{1}{2}$ en la solución. Ahora revisemos si en $x = 5$ la expresión $\dfrac{2x-1}{x-5}$ es cero.

$$\frac{2x-1}{x-5} = \frac{2(5)-1}{5-1} = \frac{9}{0}$$

Tenemos una división por cero. Luego en $x = 5$ la expresión $\dfrac{2x-1}{x-5}$ no esta definida por lo que no puede ser cero. Concluimos que la solución de la desigualdad $\dfrac{2x-1}{x-5} \geq 0$ es $(-\infty, \frac{1}{2}]$ o $(5, \infty)$. $\square$

NOTA: Los valores de la variable que hacen que el denominador de la expresión racional sea cero NUNCA se incluyen en la solución.

EJERCICIOS: Resuelva la desigualdad (sólo los problemas con numeración impar).

1. $(x+2)(x-5) < 0$
2. $x^2 > 16$
3. $x^2 - 9 < 0$
4. $x(x+1) > 0$
5. $x^2 > 4x$
6. $x^2 + 2x + 1 > 0$
7. $x^2 - x - 6 \leq 0$
8. $3x^2 < 10 - x$
9. $x^2 - 2x - 5 \geq 3$
10. $x^2 < 5$
11. $6x - 8 > x^2$
12. $6x^2 + x - 12 < 0$
13. $x(3x-1) \leq 4$
14. $25x^2 - 9 \leq 0$
15. $2x^2 < 5x + 3$

SOLUCIONES

1. $(2, 5)$
3. $(-3, 3)$
5. $(-\infty, 0)$ o $(4, \infty)$
7. $[-2, 3]$
9. $(-\infty, -2]$ o $[4, \infty)$
11. $(-\infty, -5/2)$ o $(1, \infty)$
13. $[-3/5, 3/5]$
15. $(-1/2, 3)$