

Ecuaciones con Radicales

Usaremos la siguiente propiedad para resolver estas ecuaciones:

Cualquier raíz de una ecuación dada, puede ser también raíz de otra ecuación que se obtenga al igualar los cuadrados de los dos miembros de la ecuación propuesta.

Empero, al elevar al cuadrado los dos miembros de una ecuación, se obtienen valores para la incógnita que pueden resultar incorrectos para la ecuación original, tales valores se llaman *raíces extrañas* de la ecuación. Esto debido a que los radicales de índice par presentan problemas de indefinición con subradicales negativos.

Para resolver una ecuación que comprende radicales se efectúan los siguientes pasos:

1. Se deja en uno de los miembros un solo radical, trasladando al otro miembro los demás términos.
2. Se elevan al cuadrado, al cubo, etc. los dos miembros de la ecuación obtenida y se igualan entre si (depende del índice de la raíz involucrada).
3. Si la ecuación obtenida no contiene radicales se resuelve normalmente. Si por el contrario, contiene uno o más radicales se repiten los pasos 1 y 2 hasta obtener una ecuación sin radicales. Luego se resuelve esta última ecuación.
4. Se sustituyen en la ecuación original los valores obtenidos en el paso anterior y se determinan las raíces extrañas.

El proceso de liberar la ecuación de radicales se conoce con el nombre de *racionalización de la ecuación*.

Ejemplo 1.

Resolver: $\sqrt{x + 3} = 4$

Solución.

$$(\sqrt{x + 3})^2 = (4)^2 \quad \text{elevando ambos miembros al cuadrado,}$$

$$x+3=16 \quad \text{eliminando el radical con el cuadrado,}$$

$$x=16-3 \quad \text{restando 3 a ambos lados de la ecuación,}$$

$$x=13 \quad \text{posible solución.}$$

Al sustituir $x=13$ en la ecuación original para chequear si es una raíz extraña o no, nos percatamos que $\sqrt{13+3}=4$, es correcta. Por tanto.

$$S = \{13\}$$

Ejemplo 2.

Resolver: $\sqrt{2x^2 - 1} = x$

Solución.

$$(\sqrt{2x^2 - 1})^2 = (x)^2 \quad \text{elevando ambos miembros al cuadrado,}$$

$$2x^2 - 1 = x^2 \quad \text{eliminando el radical con el cuadrado,}$$

$$2x^2 - x^2 = 1 \quad \text{transponiendo términos,}$$

$$x^2 = 1 \quad \text{restando los coeficientes de los cuadrados}$$

$$x = \pm 1 \quad \text{posibles 2 soluciones.}$$

Si sustituimos $x=-1$ en la ecuación original, obtenemos

$$\sqrt{2(-1)^2 - 1} = (-1)$$

Claramente se observa que el miembro derecho de esta ecuación no puede ser negativo, $\sqrt{1} = -1$. Se descarta -1 por ser una raíz extraña y se acepta solamente $x=1$.

$$S = \{1\}$$

Ejemplo 3.

Resolver: $\sqrt{4x^2 - 15} - 2x = -1$

Solución.

$$\sqrt{4x^2 - 15} = 2x - 1, \quad \text{despejando el radical en el lado izquierdo}$$

$$(\sqrt{4x^2 - 15})^2 = (2x - 1)^2, \quad \text{elevando ambos miembros al cuadrado,}$$

$$4x^2 - 15 = (2x - 1)^2, \quad \text{eliminando el radical con el cuadrado,}$$

$$4x^2 - 15 = 4x^2 - 4x + 1 \quad \text{desarrollando el binomio de la derecha}$$

$$-15 = -4x + 1 \quad \text{cancelando términos a ambos miembros,}$$

$$4x = 1 + 15 \quad \text{transponiendo términos,}$$

$$4x = 16$$

$$x = \frac{16}{4} \quad \text{pasando a dividir,}$$

$$x = 4 \quad \text{posible solución.}$$

Al sustituir el $x=4$ en la ecuación original se tiene:

$$\sqrt{4 \cdot 4^2 - 15} - 2 \cdot 4 = -1$$

$$\sqrt{4 \cdot 16 - 15} - 8 = -1$$

$$\sqrt{64 - 15} - 8 = -1$$

$$\sqrt{49} - 8 = -1$$

$7 - 8 = -1$. La cual es correcta, y se toma como solución: $S = \{4\}$.

Ejemplo 4.

Resolver: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$

Solución.

$$\sqrt{x+4} = 5 - \sqrt{x-1} \quad \text{aislando un radical,}$$

$$(\sqrt{x+4})^2 = (5 - \sqrt{x-1})^2 \quad \text{elevando al cuadrado,}$$

$$x + 4 = 25 - 2 \cdot 5\sqrt{x-1} + (\sqrt{x-1})^2 \quad \text{desarrollando la segunda fórmula}$$

notable,

$$x + 4 = 25 - 10\sqrt{x - 1} + x - 1$$

haciendo cálculos

$$x + 4 - 25 - x + 1 = -10\sqrt{x - 1}$$

transponiendo términos,

$$-20 = -10\sqrt{x - 1}$$

$$20 = 10\sqrt{x - 1}$$

$$2 = \sqrt{x - 1}$$

$$(2)^2 = (\sqrt{x - 1})^2$$

elevando al cuadrado a ambos lados,

$$4 = x - 1$$

$$x = 5$$

posible solución de la ecuación.

$$\text{Comprobando } x=5, \sqrt{5+4} + \sqrt{5-1} = 5$$

$$\text{Luego, } S = \{5\}$$

Ejemplo 5.

$$\text{Resolver: } \sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x+2} = 0$$

Solución.

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+2}$$

transponiendo términos hacia la derecha,

$$(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1})^2 = (2\sqrt{x+2})^2$$

elevando cuadrados,

$$(\sqrt{x+7})^2 + 2\sqrt{x+7}\sqrt{x-1} + (\sqrt{x-1})^2 = 4(x+2)$$

$$x+7 + 2\sqrt{x+7}\sqrt{x-1} + x-1 = 4x+8$$

eliminando raíces,

$$2\sqrt{x+7}\sqrt{x-1} = 4x+8 - x - 7 - x + 1$$

transponiendo términos,

$$2\sqrt{x^2+6x-7} = 2x+2$$

efectuando,

$$\sqrt{x^2 + 6x - 7} = \frac{2(x+1)}{2}$$

$$\sqrt{x^2 + 6x - 7} = (x + 1)$$

$$(\sqrt{x^2 + 6x - 7})^2 = (x + 1)^2$$

elevando al cuadrado,

$$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2x + 1$$

desarrollando los binomios,

$$6x - 2x = 1 + 7$$

$$4x=8$$

$$x=2$$

Sustituyendo $x=2$ en la ecuación original, obtenemos

$$\sqrt{2 + 7} + \sqrt{2 - 1} - 2\sqrt{2 + 2} = 0, \text{ y finalmente}$$

$$S = \{2\}$$

Ejercicios

Parte I. Resuélvanse las ecuaciones con radicales. Recuerde que hay que verificar las respuestas en la ecuación original.

1. $\sqrt{x} + 5 = 7$ R/4.
2. $5 + 3\sqrt{x} = 8$ R/1.
3. $8 + \sqrt[3]{x} = 12$ R/64.
4. $2 + 5\sqrt[3]{x} = 32$ R/216.
5. $\sqrt{x - 8} = 2$ R/12.
6. $5 - \sqrt{3x + 1} = 0$ R/8.
7. $\sqrt{x + 3} = \sqrt{5x - 1}$ R/1.
8. $\sqrt{5x + 1} = \sqrt{14x + 2}$ R/ $-\frac{1}{9}$.
9. $\sqrt{3x - 1} = \sqrt{2x + 1}$ R/2.
10. $\sqrt{2x + 1} = \sqrt{x + 5}$ R/4.
11. $\sqrt{4x + 9} = \sqrt{8x + 2}$ R/ $\frac{7}{4}$.
12. $\sqrt{2x + 2} = \sqrt{3x - 1}$ R/3.
13. $\sqrt{4x - 11} = 7\sqrt{2x - 29}$ R/15.
14. $x - \sqrt{x - 1} = 1$ R/1 y 2.
15. $3x = \sqrt{3x + 7} - 1$ R/ $\frac{2}{3}$.
16. $2x = \sqrt{-2x + 5} - 1$ R/ $\frac{1}{2}$.
17. $6x - \sqrt{18x - 8} = 2$ R/ $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$.
18. $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 1} = 1$ R/2.
19. $\sqrt{x - 5} - \sqrt{4x - 7} = 0$ R/ $\frac{2}{3}$.
20. $\sqrt{x} + \sqrt{x + 7} = 7$ R/9.
21. $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x - 3} = 2$ R/4 y 12.
22. $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 2} = 4$ R/3.

23. $\sqrt{3x-5} + \sqrt{3x-14} = 9$ R/10.
24. $\sqrt{x+10} - \sqrt{x+19} = -1$ R/6.
25. $\sqrt{5-x} + \sqrt{x+3} = 0$ R/S= \emptyset .
26. $\sqrt{5x+19} - \sqrt{5x} = -1$ R/S= \emptyset .
27. $\sqrt{x-2} + 5 = \sqrt{x+53}$ R/11.
28. $\sqrt{9x-14} = 3\sqrt{x+10} - 4$ R/15.
29. $\sqrt{x-16} - \sqrt{x+8} = -4$ R/17.
30. $\sqrt{5x-1} + 3 = \sqrt{5x+26}$ R/2.
31. $13 - \sqrt{13+4x} = 2\sqrt{x}$ R/9.
32. $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+4} = 2\sqrt{x-1}$ R/5.
33. $\sqrt{9x+7} - \sqrt{x} - \sqrt{16x-7} = 0$ R/1.
34. $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} - \sqrt{4x+9} = 0$ R/4.
35. $\sqrt{14-x} + \sqrt{11-x} = \frac{3}{\sqrt{11-x}}$ R/10.
36. $\sqrt{9x+10} - 2\sqrt{x+3} = \sqrt{x-2}$ R/6.
37. $6\sqrt{x+5} - 3 = 4\sqrt{x+5} + 17$ R/95.
38. $7 + \sqrt[3]{5x-2} = 9$ R/2.
39. $15 - \sqrt[3]{7x-1} = 12$ R/4.
40. $\sqrt{x^2+12} - x = 2$ R/2.
41. $\sqrt{2x^2+x+2} = \sqrt{2x+3}$ R/1 o $\frac{-1}{2}$.
42. $\sqrt{9x^2-5} - 3x = -1$ R/1.
43. $\sqrt{x^2-2x+1} = 9-x$ R/5.
44. $\sqrt{5x^2-4x+3} - x = 1$ R/1 y $\frac{1}{2}$.
45. $3x - \sqrt{6x^2-x+13} = 1$ R/3.
46. $\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{4x+1} = 0$ R/0 y 2.
47. $\sqrt{x^2-5x+1} - \sqrt{1-8x} = 0$ R/0 y -3.

Parte II. Ecuaciones con radicales en el denominador.

Instrucciones: se debe eliminar el denominador usando las leyes del álgebra para dejarlas como las de la Parte I.

1. $\frac{\sqrt{x+5}-4}{\sqrt{2x+1}-2} = -1$

2. $\frac{\sqrt{3x-2}+1}{\sqrt{x+2}-1} = 3$

3. $\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{2x-2}+4} = \frac{1}{2}$

4. $\frac{\sqrt{3x+10}+1}{2-\sqrt{x+3}} = 3$

5. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

6. $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = \frac{10}{\sqrt{x}}$

7. $\sqrt{4x-11} + 2\sqrt{x} = \frac{55}{\sqrt{4x-11}}$

8. $\sqrt{x} - \sqrt{x-7} = \frac{4}{\sqrt{x}}$

9. $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+4}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}}$

10. $\frac{6}{\sqrt{x+8}} = \sqrt{x+8} - \sqrt{x}$

11. $\sqrt{x-3} + \frac{8}{\sqrt{x+9}} = \sqrt{x+9}$

12. $\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{2}-2} = \frac{\sqrt{x+11}}{\sqrt{x-1}}$

13. $2\sqrt{x+6} - \sqrt{4x-3} = \frac{9}{\sqrt{4x-3}}$

14. $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = \frac{2\sqrt{x-5}}{2\sqrt{x-1}}$

15. $\sqrt{x+14} - \sqrt{x-7} = \frac{6}{\sqrt{x-7}}$

16. $\sqrt{x+3} + \frac{6}{\sqrt{x+3}} = 5$

17. $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} = 5$

18. $2\sqrt{x} = \sqrt{x+7} + \frac{8}{\sqrt{x+7}}$

19. $\sqrt{2x} + \sqrt{4x-3} = 3$

20. $\sqrt{x} + \sqrt{x+8} = 2\sqrt{x}$

Bibliografía

- [1] Baldor, Aurelio. Álgebra Elemental.
- [2] Rees, Paul K. y Fred W. Sparks. Álgebra.