Tranformaciones de Funciones

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo I

Tabla de Contenido

- Objetivos

Objetivos:

Discutiremos:

- transformaciones algebraicas de funciones

Objetivos:

Discutiremos:

- transformaciones algebraicas de funciones
- efecto gráfico ocasionado en una gráfica por una transformación algebraica

Objetivos:

Discutiremos:

- transformaciones algebraicas de funciones
- efecto gráfico ocasionado en una gráfica por una transformación algebraica
    - desplazamiento o traslación vertical

Objetivos:

Discutiremos:

- transformaciones algebraicas de funciones
- efecto gráfico ocasionado en una gráfica por una transformación algebraica
  - desplazamiento o traslación vertical
  - desplazamiento o traslación horizontal

Objetivos:

Discutiremos:

- transformaciones algebraicas de funciones
- efecto gráfico ocasionado en una gráfica por una transformación algebraica
    - desplazamiento o traslación vertical
    - desplazamiento o traslación horizontal
    - alargamiento
    - contracción o compresión

Objetivos:

Discutiremos:

- transformaciones algebraicas de funciones
- efecto gráfico ocasionado en una gráfica por una transformación algebraica
  - desplazamiento o traslación vertical
  - desplazamiento o traslación horizontal
  - alargamiento
  - contracción o compresión
  - reflexión

Objetivos:

Discutiremos:

- transformaciones algebraicas de funciones
- efecto gráfico ocasionado en una gráfica por una transformación algebraica
  - desplazamiento o traslación vertical
  - desplazamiento o traslación horizontal
  - alargamiento
  - contracción o compresión
  - reflexión
- gráficas de funciones tranformadas algebraicamente

Objetivos:

Discutiremos:

- transformaciones algebraicas de funciones
- efecto gráfico ocasionado en una gráfica por una transformación algebraica
    - desplazamiento o traslación vertical
    - desplazamiento o traslación horizontal
    - alargamiento
    - contracción o compresión
    - reflexión
- gráficas de funciones tranformadas algebraicamente
- ejercicios

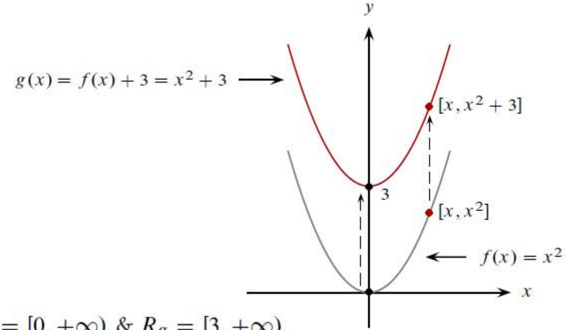
Transformaciones de Funciones

Nota: Se pretende que, a partir del conocimiento de la gráfica de una función f, esencialmente mediante traslaciones, contracciones y reflexiones, se obtenga un bosquejo de la gráfica de una función g de la forma

$$g(x) = kf(ax - b) + c$$

Transformaciones de Funciones

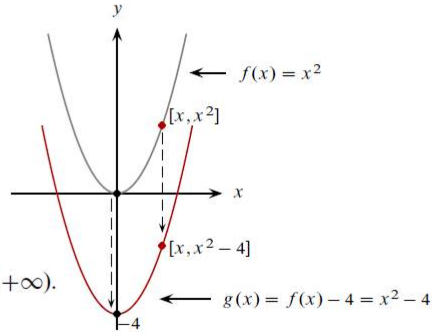
Ejemplo 1: La gráfica de: $g(x) = x^2 + 3$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia arriba 3 unidades.



$D_g = D_f$, $R_f = [0, +\infty)$ & $R_g = [3, +\infty)$.

Transformaciones de Funciones

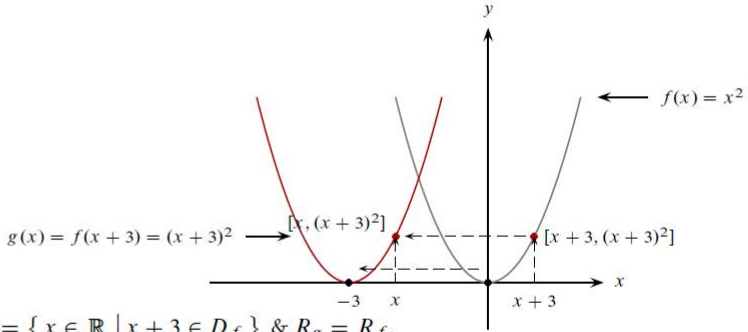
Ejemplo 2: La gráfica de: $g(x) = x^2 - 4$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia abajo 4 unidades.



$D_g = D_f R_f = [0, +\infty)$ & $R_g = [-4, +\infty)$.

Transformaciones de Funciones

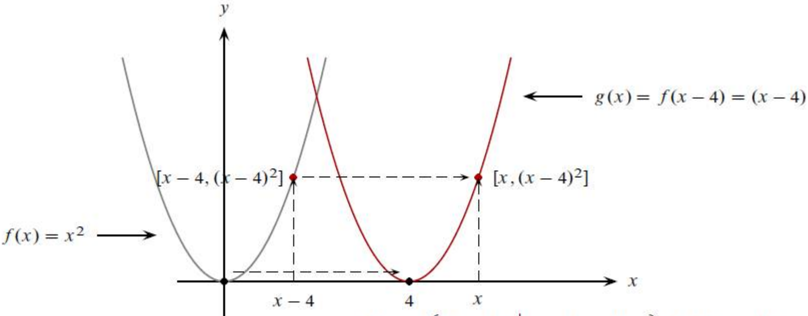
Ejemplo 3: La gráfica de: $g(x) = (x+3)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia la izquierda 3 unidades.



$D_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid x+3 \in D_f \}$ & $R_g = R_f$.

Transformaciones de Funciones

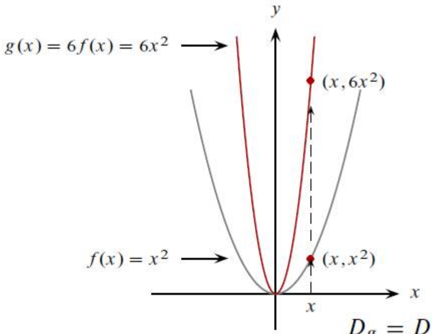
Ejemplo 4: La gráfica de: $g(x) = (x-4)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia la derecha 4 unidades.



$D_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid x - 4 \in D_f \}$ & $R_g = R_f$.

Transformaciones de Funciones

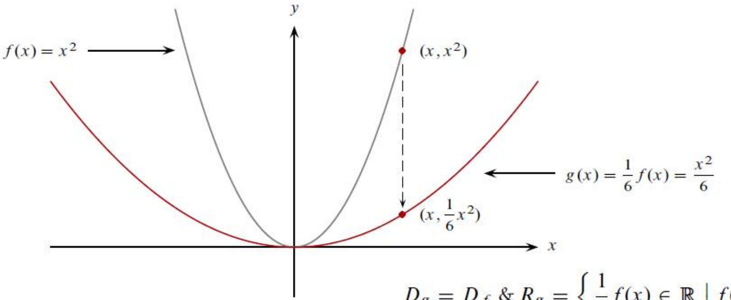
Ejemplo 5: La gráfica de: $g(x) = 6x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ alargada o estirada 6 veces en la dirección vertical.



$$D_g = D_f \; \& \; R_g = \{ 6f(x) \mid f(x) \in R_f \}.$$

Transformaciones de Funciones

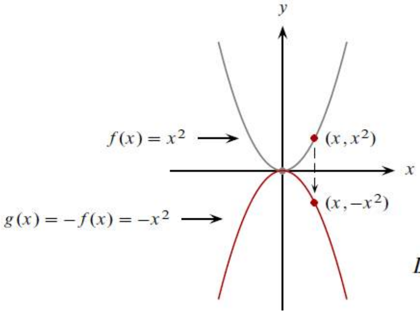
Ejemplo 6: La gráfica de: $g(x) = \frac{1}{6}x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ comprimida 6 veces en la dirección vertical.



$$D_g = D_f \;\&\; R_g = \left\{ \frac{1}{6}f(x) \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \in R_f \right\}.$$

Transformaciones de Funciones

Ejemplo 7: La gráfica de: $g(x) = -x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ reflejada respecto al $eje - X$.



$$D_g = D_f \; \& \; R_g = \left\{ -f(x) \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \in R_f \right\}.$$

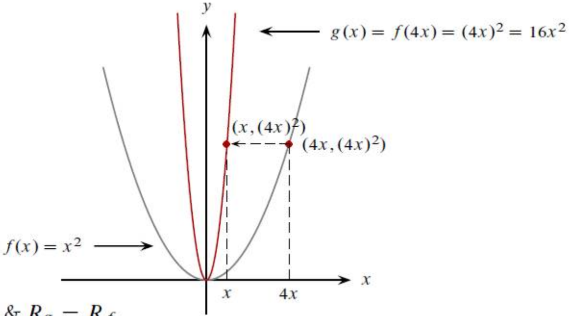
Transformaciones de Funciones

De los tres ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de $g(x) = kf(x)$ es la gráfica de f:
  1. Alargada verticalmente si $k > 1$.
  2. Comprimida verticalmente si $0 < k < 1$.
  3. Si $k < 0$, consideramos a la gráfica de la función $|k|f(x) = -kf(x)$ y la reflejamos con respecto al eje de las x.
     $D_f = D_g$, $R_g = \left\{ kf(x) \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \in \mathbb{R} \right\}$.

Transformaciones de Funciones

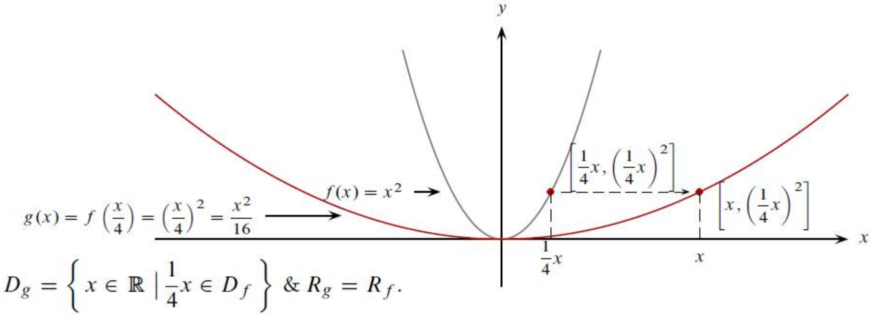
Ejemplo 8: La gráfica de $g(x) = (4x)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ comprimida horizontalmente 4 veces.



$D_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid 4x \in D_f \}$ & $R_g = R_f$.

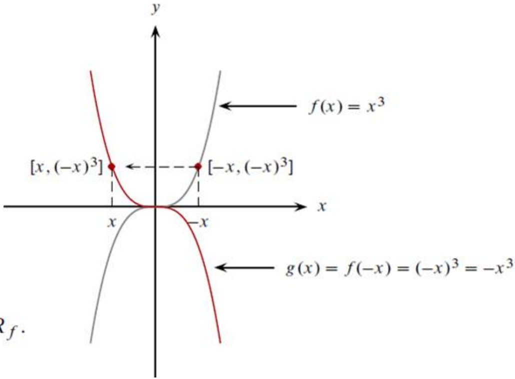
Transformaciones de Funciones

Ejemplo 9: La gráfica de $g(x) = (\frac{1}{4}x)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ alargada horizontalmente 4 veces.



Transformaciones de Funciones

Ejemplo 10: La gráfica de $g(x) = (-x)^3$ es la gráfica de $f(x) = x^3$ reflejada respecto al eje y.



$$D_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid -x \in D_f \} \ \& \ R_g = R_f.$$

Transformaciones de Funciones

De los tres ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de $g(x) = f(kx)$ es la gráfica de f:
    1. Comprimida horizontalmente si $k > 1$.
    2. Alargada horizontalmente si $0 < k < 1$.
    3. Si $k < 0$, consideramos a la gráfica de la función $f(|k|x) = f(-kx)$ y la reflejamos con respecto al eje de las y.
       $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid kx \in D_f\}$, $R_g = R_f$.

Transformaciones de Funciones

Nota: La siguiente tabla resume las reglas básicas que se deben seguir para efectuar transformaciones a una gráfica que se represente por medio de una fórmula o ecuación.

Fórmula ($k > 0$)	Explicación	Efecto sobre la gráfica de f
$y = f(x) + k$	Sumar una constante positiva a la ecuación de la función.	Desplaza la gráfica de f k unidades hacia arriba.
$y = f(x) - k$	Restar una constante positiva a la ecuación de la función.	Desplaza la gráfica de f k unidades hacia abajo.
$y = f(x - k)$	Restar una constante a la variable en la ecuación de la función.	Desplaza la gráfica de f k unidades hacia la derecha.
$y = f(x + k)$	Sumar una constante a la variable en la ecuación de la función.	Desplaza la gráfica de f k unidades hacia la izquierda.
$y = -f(x)$	Cambiar el signo de la ecuación de la función.	Refleja la gráfica de f respecto al *eje-X*.
$y = kf(x)$; $k > 1$	Multiplicar la ecuación de la función por una constante mayor que 1.	Alarga o estira la gráfica de f k veces en la dirección vertical.
$y = kf(x)$; $k < 1$	Multiplicar la ecuación de la función por una constante positiva menor que 1.	Comprime o encoge la gráfica de f k veces en la direccion vertical.
$y = f(-x)$	Multiplicar la variable de la ecuación por -1.	Refleja la gráfica de f respecto al *eje-Y*.
$y = f(kx)$; $k < 1$	Multiplicar la variable de la ecuación por una constante positiva menor que 1.	Alarga o estira k veces en la dirección horizontal.
$y = f(kx)$; $k > 1$	Multiplicar la variable de la ecuación por una constante mayor que 1.	Comprime o encoge la gráfica de f k veces en la dirección horizontal.

Transformaciones de Funciones

Ejemplo 11: Grafique la función $y = -x^2 + 5$

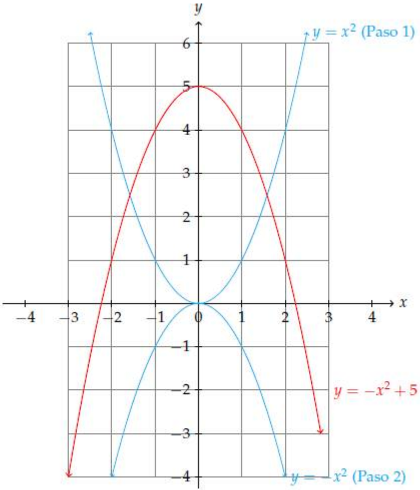
Nota: Graficamos esta función con los siguientes pasos:

Pasos:

1. Graficamos la función $y = x^2$.
2. Hacemos una reflexión respecto al $eje - X$ multiplicando por -1; así obtenemos la gráfica de la función:$y = -x^2$.
3. Hacemos una traslación vertical sumando 5 a la función; así obtenemos la gráfica de la función: $y = -x^2 + 5$.

Transformaciones de Funciones

Gráfica de la función $y = -x^2 + 5$.



Transformaciones de Funciones

Ejemplo 12: Grafique la función $y = x^2 - 4x + 1$..

Nota: Para utilizar transformaciones primero expresaremos la función de la forma $y = a(x-h)^2 + k$, usando la técnica *completando el cuadrado.*

Pasos:

1. $y = x^2 - 4x + 1$
2. $= (x^2 - 4x + 4 - 4) + 1$: **se suma** $(\frac{4}{2})^2$ **para completar el cuadrado**
3. $= (x^2 - 4x + 4) - 4 + 1$
4. $= (x - 2)^2 - 3$

Transformaciones de Funciones

Gráfica de la función $y = x^2 - 4x + 1$.