Exponentes, Raíces y Radicales en los Números Reales

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo I

Tabla de Contenido

Objetivos:

Discutiremos:

- exponentes enteros

Objetivos:

Discutiremos:

- exponentes enteros
- raíz n-ésima principal de un número real

Objetivos:

Discutiremos:

- exponentes enteros
- raíz n-ésima principal de un número real
- radicales y sus propiedades

Objetivos:

Discutiremos:

- exponentes enteros
- raíz n-ésima principal de un número real
- radicales y sus propiedades
- exponentes fraccionarios y sus propiedades

Objetivos:

Discutiremos:

- exponentes enteros
- raíz n-ésima principal de un número real
- radicales y sus propiedades
- exponentes fraccionarios y sus propiedades
- relación entre radicales y exponentes fraccionarios

Objetivos:

Discutiremos:

- exponentes enteros
- raíz n-ésima principal de un número real
- radicales y sus propiedades
- exponentes fraccionarios y sus propiedades
- relación entre radicales y exponentes fraccionarios
- racionalización del numerador o denominador

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Definición:

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces definimos,

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Definición:

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces definimos,

1. $a^n = a \times a \times a \ldots \times a$, donde hay n factores a.

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Definición:

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces definimos,

1. $a^n = a \times a \times a \ldots \times a$, donde hay n factores a.
2. $a^0 = 1; a \neq 0$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Definición:

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces definimos,

1. $a^n = a \times a \times a ... \times a$, donde hay n factores a.
2. $a^0 = 1; a \neq 0$
3. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}; a \neq 0$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 =$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) =$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 =$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) =$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$
3. $-(-2)^4 =$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = \, - \, (3 \times 3 \times 3 \times 3) = \, - \, 81$
3. $-(-2)^4 = \, - \, ((-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)) =$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$
3. $-(-2)^4 = -((-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)) = -16$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$
3. $-(-2)^4 = -((-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)) = -16$
4. $(2^{20})^0 =$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$
3. $-(-2)^4 = -((-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)) = -16$
4. $(2^{20})^0 = 1$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$
3. $-(-2)^4 = -((-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)) = -16$
4. $(2^{20})^0 = 1$
5. $0^0 =$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$
3. $-(-2)^4 = -((-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)) = -16$
4. $(2^{20})^0 = 1$
5. $0^0 =$ no definido

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$
3. $-(-2)^4 = -((-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)) = -16$
4. $(2^{20})^0 = 1$
5. $0^0 = \text{no definido}$
6. $(-3)^{-4} =$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$
3. $-(-2)^4 = -((-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)) = -16$
4. $(2^{20})^0 = 1$
5. $0^0 = \text{no definido}$
6. $(-3)^{-4} = \dfrac{1}{(-3)^4} =$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = \ - \ (3 \times 3 \times 3 \times 3) = \ - \ 81$
3. $-(-2)^4 = \ - \ ((-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)) = \ - \ 16$
4. $(2^{20})^0 = 1$
5. $0^0 =$ no definido
6. $(-3)^{-4} = \dfrac{1}{(-3)^4} = \dfrac{1}{81}$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$
3. $-(-2)^4 = -((-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)) = -16$
4. $(2^{20})^0 = 1$
5. $0^0 = \text{no definido}$
6. $(-3)^{-4} = \dfrac{1}{(-3)^4} = \dfrac{1}{81}$
7. $-3^{-4} =$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = \, - \, (3 \times 3 \times 3 \times 3) = \, - \, 81$
3. $-(-2)^4 = \, - \, ((-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)) = \, - \, 16$
4. $(2^{20})^0 = 1$
5. $0^0 = \text{no definido}$
6. $(-3)^{-4} = \dfrac{1}{(-3)^4} = \dfrac{1}{81}$
7. $-3^{-4} = \dfrac{-1}{3^4} =$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$
3. $-(-2)^4 = -((-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)) = -16$
4. $(2^{20})^0 = 1$
5. $0^0 = \text{no definido}$
6. $(-3)^{-4} = \dfrac{1}{(-3)^4} = \dfrac{1}{81}$
7. $-3^{-4} = \dfrac{-1}{3^4} = -\dfrac{1}{81}$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejemplos:

1. $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
2. $-3^4 = \, - \, (3 \times 3 \times 3 \times 3) = \, - \, 81$
3. $-(-2)^4 = \, - \, ((-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)) = \, - \, 16$
4. $(2^{20})^0 = 1$
5. $0^0 = \text{no definido}$
6. $(-3)^{-4} = \dfrac{1}{(-3)^4} = \dfrac{1}{81}$
7. $-3^{-4} = \dfrac{-1}{3^4} = -\dfrac{1}{81}$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Ejercicios: Determine el valor numérico de:

(1) $3^4 =$	(4) $3^{-2} =$	(7) $\dfrac{1}{2^{-3}} =$
(2) $(-2)^3 =$	(5) $(-2)^{-3} =$	(8) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} =$
(3) $(-4)^4 =$	(6) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3} =$	(9) $(-25)^0 =$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Propiedades Básicas de los Exponentes Enteros:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Si todas las expresiones están definidas en $\mathbb{R}$, entonces:

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Propiedades Básicas de los Exponentes Enteros:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Si todas las expresiones están definidas en $\mathbb{R}$, entonces:

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Propiedades Básicas de los Exponentes Enteros:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Si todas las expresiones están definidas en $\mathbb{R}$, entonces:

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Propiedades Básicas de los Exponentes Enteros:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Si todas las expresiones están definidas en $\mathbb{R}$, entonces:

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n \times b^n$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Propiedades Básicas de los Exponentes Enteros:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Si todas las expresiones están definidas en $\mathbb{R}$, entonces:

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n \times b^n$
4. Si $a \neq 0$, $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

El Conjunto de los Números Reales

Potencias de Números Reales:

Propiedades Básicas de los Exponentes Enteros:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Si todas las expresiones están definidas en $\mathbb{R}$, entonces:

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n \times b^n$
4. Si $a \neq 0, \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
5. Si $b \neq 0, (\dfrac{a}{b})^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

El Conjunto de los Números Reales

Ejercicios: Use propiedades de exponentes y simplifique. Escriba cada resultado usando únicamente exponentes positivos. Suponga que ninguna variable asume valor 0.

(1) $x^4 \cdot x^5 =$

(2) $2^3 \cdot 2^7 =$

(3) $\dfrac{x^8}{x^4} =$

(4) $\dfrac{x^3}{x^9} =$

(5) $\dfrac{2^8}{2^5} =$

(6) $(x^3)^5 =$

(7) $x^{-3} \cdot x^5 =$

(8) $\dfrac{x^{-4}}{x^{-7}} =$

(9) $(x^{-3})^4 =$

(10) $(x^2 y^{-3})^{-3} =$

(11) $\left(\dfrac{x^2}{y^{-3}}\right)^2 =$

(12) $(x^2 y^3)(xy^2)^3 =$

(13) $(x^{-2} y^2)^{-3}(x^{-4} y^{-5}) =$

(14) $\dfrac{x^{-3} y^2}{x^4 y^5} =$

(15) $\dfrac{(x^2 y^{-3})^{-2}}{x^4 y^5}$

(16) $\dfrac{(2x^2 y)^{-2}}{(3x^{-1} y^4)(xy^{-2})^3} =$

Definición (Raíz enésima (o *n*-ésima) de un número real a):

Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Entonces, se define una **raíz enésima** (o ***n*-ésima)** de a como un número real b, *si existe*, tal que $b^n = a$.

Definición (Raíz enésima (o *n*-ésima) de un número real a):

Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Entonces, se define una **raíz enésima** (o ***n*-ésima)** de a como un número real b, *si existe*, tal que $b^n = a$.

Notas:

Definición (Raíz enésima (o n-ésima) de un número real a):

Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Entonces, se define una **raíz enésima** (o ***n*-ésima)** de a como un número real b, *si existe*, tal que $b^n = a$.

Notas:

1) Todo número real positivo b tiene dos raíces pares reales; una positiva y una negativa.

Definición (Raíz enésima (o n-ésima) de un número real a):

Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Entonces, se define una **raíz enésima** (o ***n*-ésima**) de a como un número real b, *si existe*, tal que $b^n = a$.

Notas:

1) Todo número real positivo b tiene dos raíces pares reales; una positiva y una negativa.

A la raíz positiva se le llama la **raíz principal**. Se denota por $a^{\frac{1}{n}}$ o por $\sqrt[n]{a}$.

Definición (Raíz enésima (o n-ésima) de un número real a):

Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Entonces, se define una **raíz enésima** (o ***n*-ésima)** de a como un número real b, *si existe*, tal que $b^n = a$.

Notas:

1) Todo número real positivo b tiene dos raíces pares reales; una positiva y una negativa.
A la raíz positiva se le llama la **raíz principal**. Se denota por $a^{\frac{1}{n}}$ o por $\sqrt[n]{a}$.

2) Todo número real negativo tiene una exactamente una raíz n-ésima la cual es negativa.

Definición (Raíz enésima (o n-ésima) de un número real a):

Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Entonces, se define una **raíz enésima** (o ***n*-ésima**) de a como un número real b, *si existe*, tal que $b^n = a$.

Notas:

1) Todo número real positivo b tiene dos raíces pares reales; una positiva y una negativa.
A la raíz positiva se le llama la **raíz principal**. Se denota por $a^{\frac{1}{n}}$ o por $\sqrt[n]{a}$.

2) Todo número real negativo tiene una exactamente una raíz n-ésima la cual es negativa.
Esa raíz real única es la principal.

Definición (Raíz enésima (o n-ésima) de un número real a):

Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Entonces, se define una **raíz enésima** (o ***n*-ésima**) de a como un número real b, *si existe*, tal que $b^n = a$.

Notas:

1) Todo número real positivo b tiene dos raíces pares reales; una positiva y una negativa.
A la raíz positiva se le llama la **raíz principal**. Se denota por $a^{\frac{1}{n}}$ o por $\sqrt[n]{a}$.

2) Todo número real negativo tiene una exactamente una raíz n-ésima la cual es negativa.
Esa raíz real única es la principal.

El Conjunto de los Números Reales

3) Los números reales negativos no tienen raíces pares reales.

El Conjunto de los Números Reales

3) Los números reales negativos no tienen raíces pares reales. Por ejemplo, $(-16)^{\frac{1}{2}}$ no representa un número real.

El Conjunto de los Números Reales

Raíz n-ésima de un número real a

Nota: Recuerde que la raíz n-ésima de a se denota por $a^{\frac{1}{n}}$ o por $\sqrt[n]{a}$. Por lo tanto,

$$a^{\frac{1}{n}} = b \iff b^n = a, \text{ o}$$
$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

El Conjunto de los Números Reales

Raíz enésima (o n-ésima) de un número real a:
Ejemplos:

1. $8^{\frac{1}{3}} = 2$ pues $2^3 = 8$. En este caso, decimos que 2 es la raíz cúbica principal de 8. Haciendo uso de radicales, $\sqrt[3]{8} = 2$

El Conjunto de los Números Reales

Raíz enésima (o n-ésima) de un número real a:
Ejemplos:

1. $8^{\frac{1}{3}} = 2$ pues $2^3 = 8$. En este caso, decimos que 2 es la raíz cúbica principal de 8. Haciendo uso de radicales, $\sqrt[3]{8} = 2$

2. $625^{\frac{1}{4}} = 5$ pues $5^4 = 625$. En este caso, decimos que 5 es la raíz cuarta principal de 625 . Haciendo uso de radicales, $\sqrt[4]{625} = 5$

El Conjunto de los Números Reales

Raíz enésima (o n-ésima) de un número real a:
Ejemplos:

1. $8^{\frac{1}{3}} = 2$ pues $2^3 = 8$. En este caso, decimos que 2 es la raíz cúbica principal de 8. Haciendo uso de radicales, $\sqrt[3]{8} = 2$

2. $625^{\frac{1}{4}} = 5$ pues $5^4 = 625$. En este caso, decimos que 5 es la raíz cuarta principal de 625 . Haciendo uso de radicales, $\sqrt[4]{625} = 5$

3. $49^{\frac{1}{2}} = 7$ pues $7^2 = 49$. En este caso, decimos que 7 es la raíz cuadrada principal de 49. Haciendo uso de radicales, $\sqrt[2]{49} = 7$
En el caso de raíces cuadradas es usual omitir el índice 2 y escribir $\sqrt{49} = 2$.

El Conjunto de los Números Reales

Raíz enésima (o n-ésima) de un número real a:
Ejemplos:

4. $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$ pues (-2)$^3 = -8$. En este caso, decimos que -2 es la raíz cúbica principal de -8. Haciendo uso de radicales, $\sqrt[3]{-8} = -2$

El Conjunto de los Números Reales

Raíz enésima (o n-ésima) de un número real a:
Ejemplos:

4. $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$ pues (-2)$^3 = -8$. En este caso, decimos que -2 es la raíz cúbica principal de -8. Haciendo uso de radicales, $\sqrt[3]{-8} = -2$

5. $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$ pues (-2)$^5 = -32$. En este caso, decimos que -2 es la raíz quinta principal de 625 . Haciendo uso de radicales, $\sqrt[5]{-32} = -2$

El Conjunto de los Números Reales

Raíz enésima (o n-ésima) de un número real a:
Ejemplos:

4. $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$ pues (-2)$^3 = -8$. En este caso, decimos que -2 es la raíz cúbica principal de -8. Haciendo uso de radicales, $\sqrt[3]{-8} = -2$

5. $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$ pues (-2)$^5 = -32$. En este caso, decimos que -2 es la raíz quinta principal de 625 . Haciendo uso de radicales, $\sqrt[5]{-32} = -2$

6. $(-49)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-49}$ no representa un número real pues no exite un número real a tal que a$^2 = -49$. En este caso, decimos que -49 no tiene raíces cuadradas reales.

El Conjunto de los Números Reales

Raíz enésima (o n-ésima) de un número real a:

Nota:

En la expresión $\sqrt[n]{a}$: $\begin{cases} \text{“}n\text{” recibe el nombre de índice.} \\ \text{“}a\text{” recibe el nombre de subradical.} \\ \text{“}\sqrt{\ }\text{” es el símbolo de radical.} \end{cases}$

Nota: Al número a también se le conoce como **radicando** o **cantidad subradical**.

El Conjunto de los Números Reales

Propiedades de los radicales

Si todos los radicales indicados representan números reales, entonces

1. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar.
5. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ si n es par.
6. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

El Conjunto de los Números Reales

Ejemplos: Supongamos que todos los radicales indicados representan números reales.

1. $\sqrt[3]{4x} \cdot \sqrt[3]{5y} = \sqrt[3]{4x \cdot 5y} = \sqrt[3]{20xy}$
2. $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 4$
3. $\dfrac{\sqrt[3]{81x^7}}{\sqrt[3]{-3x}} = \sqrt[3]{\dfrac{81x^7}{-3x}} = \sqrt[3]{-27x^6} = -3x^2$

El Conjunto de los Números Reales

Ejercicios: Escriba el valor numérico de cada radical.

1.) $\sqrt[3]{-125}$	4.) $\sqrt[7]{-128}$	7.) $\sqrt{(-9)^2}$
2.) $\sqrt[4]{625}$	5.) $\sqrt[7]{128}$	8.) $\sqrt[3]{-27}$
3.) $\sqrt{(-3)^2}$	6.) $\sqrt[5]{(-7)^5}$	9.) $\sqrt[6]{(-7)^6}$

Ejercicios: Simplifique cada radical.

1.) $\sqrt{108} - \sqrt{75}$	4.) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{24} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{375} + \frac{1}{7}\sqrt[3]{1029}$
2.) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$	5.) $3\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{625}$
3.) $5\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{192}$	6.) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{54} - \frac{2}{5}\sqrt[3]{250}$

El Conjunto de los Números Reales

Nota: Las propiedades enunciadas anteriormente para potencias en los cuales el exponente es un número entero, también son válidas para potencias en las cuales el exponente es un número racional; a saber:

1.) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

2.) $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}, \; a \neq 0$

3.) $a^{\frac{-m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, \; a \neq 0$

4.) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$

5.) $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$

6.) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}, \; b \neq 0$

El Conjunto de los Números Reales

Racionalización del Denominador

Definición: Cuando tenemos una fracción con una expresión radical en el denominador podemos obtener una fracción equivalente que no tenga radicales en el denominador. A este proceso se le llama **racionalización del denominador**.

El Conjunto de los Números Reales

Racionalización del Denominador

Definición: Cuando tenemos una fracción con una expresión radical en el denominador podemos obtener una fracción equivalente que no tenga radicales en el denominador. A este proceso se le llama **racionalización del denominador**.

Racionalización del Numerador

Definición: Cuando tenemos una fracción con una expresión radical en el numerador podemos obtener una fracción equivalente que no tenga radicales en el numerador. A este proceso se le llama **racionalización del numerador**.

El Conjunto de los Números Reales

Según el tipo de radical o la forma de la expresión que aparece en el denominador, el proceso es diferente. Se pueden dar dos casos. Veamos algunos ejemplos:

Caso 1:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{9}}{3}$

El Conjunto de los Números Reales

Caso 2:

a) $$\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{2.(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{2.(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1} = 2.(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

b) $$\frac{1}{\sqrt{3}-2} = \frac{1}{\sqrt{3}-2} . \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3})^2-2^2} = \frac{\sqrt{3}+2}{3-4} = -(\sqrt{3}+2) = 2-\sqrt{3}$$

El Conjunto de los Números Reales

Ejemplo: Racionalice el numerador de la expresión
$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

El Conjunto de los Números Reales

Ejercicios: Racionalice el denominador de la expresión y simplifique.

1) $\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{9}}$

2) $\frac{-4+\sqrt{3}}{4\sqrt{9}}$

3) $\frac{4+2\sqrt{3}}{5\sqrt{4}}$

4) $\frac{2\sqrt{3}-2}{2\sqrt{16}}$

5) $\frac{2-5\sqrt{5}}{4\sqrt{13}}$

6) $\frac{\sqrt{5}+4}{4\sqrt{17}}$

7) $\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

8) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}$

9) $\frac{5}{3\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

10) $\frac{5}{\sqrt{3}+4\sqrt{5}}$

11) $\frac{2}{5+\sqrt{2}}$

12) $\frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

13) $\frac{3}{4-3\sqrt{3}}$

14) $\frac{4}{\sqrt{2}-2}$

15) $\frac{4}{3+\sqrt{5}}$

16) $\frac{2}{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$

17) $-\frac{4}{4-4\sqrt{2}}$

18) $\frac{4}{4\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

19) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

20) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

El Conjunto de los Números Reales

Ejercicios: Racionalice el numerador de la expresión y simplifique.

1) $\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{9}}$

2) $\frac{-4+\sqrt{3}}{4\sqrt{9}}$

3) $\frac{4+2\sqrt{3}}{5\sqrt{4}}$

4) $\frac{2\sqrt{3}-2}{2\sqrt{16}}$

5) $\frac{2-5\sqrt{5}}{4\sqrt{13}}$

6) $\frac{\sqrt{5}+4}{4\sqrt{17}}$

7) $\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

8) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}$