# Función Inversa

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo I

# Tabla de Contenido

# Objetivos:

Discutiremos:

- función inversa

# Objetivos:

Discutiremos:

- función inversa
- construcción de la función inversa

# Objetivos:

Discutiremos:

- función inversa
- construcción de la función inversa
- dominio y rango de la función inversa

# Objetivos:

Discutiremos:

- función inversa
- construcción de la función inversa
- dominio y rango de la función inversa
- gráfica de la función inversa

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

## Función Inversa

**Definición 1:** Sea $f$ una función inyectiva o uno a uno.

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

## Función Inversa

**Definición 1:** Sea $f$ una función inyectiva o uno a uno. Entonces $f$ admite una función inversa que se denota como $f^{-1}$ (léase "*$f$ inversa*"), donde el dominio de esta función es el rango o recorrido de $f$.

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

## Función Inversa

**Definición 1:** Sea $f$ una función inyectiva o uno a uno. Entonces $f$ admite una función inversa que se denota como $f^{-1}$ (léase "*$f$ inversa*"), donde el dominio de esta función es el rango o recorrido de $f$. La **función inversa** de $f$ (o, simplemente, **inversa**) se define como

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

## Función Inversa

**Definición 1:** Sea $f$ una función inyectiva o uno a uno. Entonces $f$ admite una función inversa que se denota como $f^{-1}$ (léase "*f inversa*"), donde el dominio de esta función es el rango o recorrido de $f$. La **función inversa** de $f$ (o, simplemente, **inversa**) se define como

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y \, \forall y \in R_f$$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

## Función Inversa

**Definición 1:** Sea $f$ una función inyectiva o uno a uno. Entonces $f$ admite una función inversa que se denota como $f^{-1}$ (léase "*f inversa*"), donde el dominio de esta función es el rango o recorrido de $f$. La **función inversa** de $f$ (o, simplemente, **inversa**) se define como

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y \; \forall y \in R_f$$

De otra forma,

$$(y, x) \in f^{-1} \Longleftrightarrow (x, y) \in f$$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

## Función Inversa

**Definición 1:** Sea $f$ una función inyectiva o uno a uno. Entonces $f$ admite una función inversa que se denota como $f^{-1}$ (léase "*f inversa*"), donde el dominio de esta función es el rango o recorrido de $f$. La **función inversa** de $f$ (o, simplemente, **inversa**) se define como

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y \; \forall y \in R_f$$

De otra forma,

$$(y, x) \in f^{-1} \Longleftrightarrow (x, y) \in f$$

Note que,

$$\text{Dominio de } f^{-1} = \text{Rango de } f$$

## Función Inversa

**Definición 1:** Sea $f$ una función inyectiva o uno a uno. Entonces $f$ admite una función inversa que se denota como $f^{-1}$ (léase "*$f$ inversa*"), donde el dominio de esta función es el rango o recorrido de $f$. La **función inversa** de $f$ (o, simplemente, **inversa**) se define como

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y \;\forall y \in R_f$$

De otra forma,

$$(y, x) \in f^{-1} \Longleftrightarrow (x, y) \in f$$

Note que,

$$\text{Dominio de } f^{-1} = \text{Rango de } f$$

$$\text{Dominio de } f = \text{Rango de } f^{-1}$$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

## Función Inversa

**Definición 2:** Sean $f$ y $g$ funciones tales que

$$f(g(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en el dominio de } g$$

y

$$g(f(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en el dominio de } f.$$

Si se cumplen ambas condiciones, entonces la función $g$ es la **función inversa** de $f$ y $f$ es la **función inversa** de $g$. Se denota por $f = g^{-1}$ y $g = f^{-1}$. Por lo tanto,

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ y } f^{-1}(f(x)) = x$$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

Note que,

$$\text{Dominio de } f = \text{Rango de } g$$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

Note que,

$$\text{Dominio de } f = \text{Rango de } g$$

$$\text{Dominio de } g = \text{Rango de } f$$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo:** Sea $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{3}{2}$ y $g(x) = 4(x + \frac{3}{2})$. Determine si $f$ y $g$ son funciones inversas mutuamente.

**Solución:**

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo:** Sea $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{3}{2}$ y $g(x) = 4(x + \frac{3}{2})$. Determine si $f$ y $g$ son funciones inversas mutuamente.

**Solución:**

$$f(g(x)) = f(4(x + \frac{3}{2})) = f(4x+6) = \frac{4x+6}{4} - \frac{3}{2} = x$$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo:** Sea $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{3}{2}$ y $g(x) = 4(x + \frac{3}{2})$. Determine si $f$ y $g$ son funciones inversas mutuamente.

**Solución:**

$$f(g(x)) = f(4(x + \frac{3}{2})) = f(4x + 6) = \frac{4x + 6}{4} - \frac{3}{2} = x$$

$$g(f(x)) = g(\frac{x}{4} - \frac{3}{2}) = 4(\frac{x}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = x$$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo:** Sea $f(x) = \dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{2}$ y $g(x) = 4(x + \dfrac{3}{2})$. Determine si $f$ y $g$ son funciones inversas mutuamente.

**Solución:**

$$f(g(x)) = f(4(x + \frac{3}{2})) = f(4x+6) = \frac{4x+6}{4} - \frac{3}{2} = x$$

$$g(f(x)) = g(\frac{x}{4} - \frac{3}{2}) = 4(\frac{x}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = x$$

Por lo tanto, las funciones $f$ y $g$ son funciones inversas mutuamente.

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Nota:** La gráfica de la función inversa $f^{-1}$ es simétrica a la gráfica de $f$ respecto de la recta $y = x$.

## Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

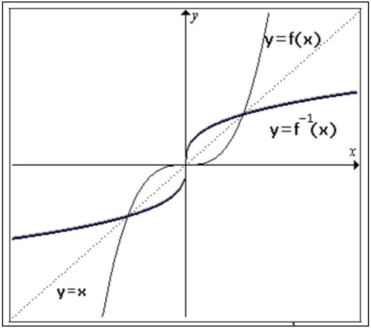
**Nota:** La gráfica de la función inversa $f^{-1}$ es simétrica a la gráfica de $f$ respecto de la recta $y = x$.

**Ejemplo:** Gráficas de f y de $\mathrm{f}^{-1}$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Nota:** La gráfica de la función inversa $f^{-1}$ es simétrica a la gráfica de $f$ respecto de la recta $y = x$.

**Ejemplo:** Gráficas de f y de f$^{-1}$



# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Observación:** Nota: En la notación $f^{-1}(x)$ el índice $-1$ no tiene el significado en álgebra como exponente. Esto es: $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$.

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo:**

Si la función $f$ tiene función inversa y $f(1) = 4$, $f(3) = 8$ , $f(5) = -11$, determinar $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(8)$,$f^{-1}(11)$.

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo:**

Si la función $f$ tiene función inversa y $f(1) = 4$, $f(3) = 8$ , $f(5) = -11$, determinar $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(8)$,$f^{-1}(11)$.

**Solución:** A partir de la definición de función inversa, tenemos que:
$f^{-1}(4) = 1$; **Razón:** $f(1) = 4$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo:**

Si la función $f$ tiene función inversa y $f(1) = 4$, $f(3) = 8$ , $f(5) = -11$, determinar $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(8)$,$f^{-1}(11)$.

**Solución:** A partir de la definición de función inversa, tenemos que:
$f^{-1}(4) = 1$; **Razón:** $f(1) = 4$
$f^{-1}(8) = 3$; **Razón:** $f(3) = 8$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo:**

Si la función $f$ tiene función inversa y $f(1) = 4$, $f(3) = 8$ , $f(5) = -11$, determinar $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(8)$,$f^{-1}(11)$.

**Solución:** A partir de la definición de función inversa, tenemos que:
$f^{-1}(4) = 1$; **Razón:** $f(1) = 4$
$f^{-1}(8) = 3$; **Razón:** $f(3) = 8$
$f^{-1}(-11) = 5$; **Razón:** $f(5) = -11$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo:**

Si la función $f$ tiene función inversa y $f(1) = 4$, $f(3) = 8$ , $f(5) = -11$, determinar $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(8)$,$f^{-1}(11)$.

**Solución:** A partir de la definición de función inversa, tenemos que:
$f^{-1}(4) = 1$; **Razón:** $f(1) = 4$
$f^{-1}(8) = 3$; **Razón:** $f(3) = 8$
$f^{-1}(-11) = 5$; **Razón:** $f(5) = -11$

***Recuerde*:** En la función inversa se intercambian cada una de las parejas ordenadas que constituyen a la función original:

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo:**

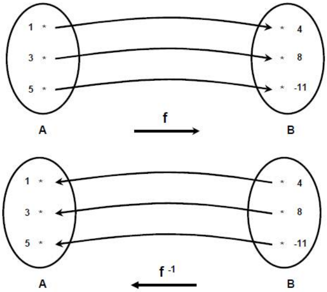
Si la función $f$ tiene función inversa y $f(1) = 4$, $f(3) = 8$ , $f(5) = -11$, determinar $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(8)$,$f^{-1}(11)$.

**Solución:** A partir de la definición de función inversa, tenemos que:
$f^{-1}(4) = 1$; **Razón:** $f(1) = 4$
$f^{-1}(8) = 3$; **Razón:** $f(3) = 8$
$f^{-1}(-11) = 5$; **Razón:** $f(5) = -11$

***Recuerde*:** En la función inversa se intercambian cada una de las parejas ordenadas que constituyen a la función original: $(x,\ y) \in f \iff (y,\ x) \in f^{-1}$.

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

El siguiente diagrama muestra las correspondencias:

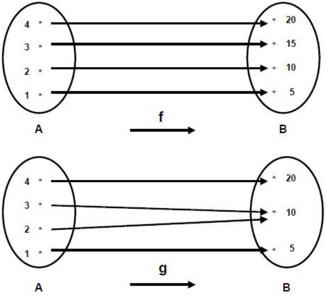


# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Nota:** No toda función tiene función inversa.

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Nota:** No toda función tiene función inversa. En la siguiente figura se aprecia que f sí tiene inversa y g no tiene función inversa, ya que no cumple con la condición de ser función inyectiva.



# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Nota:** La *prueba de la línea horizontal* es un criterio gráfico que se puede utilizar para determinar si una función $f$ tiene función inversa.

**Prueba de Línea Horizontal:**

Una función $f$ tiene función inversa $f^{-1}$ si toda línea horizontal corta la gráfica de $f$, como máximo, en un punto.

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

## Fórmula de la Función Inversa:

**Pasos:** Para obtener la fórmula algebraica de la función inversa de una función inyectiva:

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

## Fórmula de la Función Inversa:

**Pasos:** Para obtener la fórmula algebraica de la función inversa de una función inyectiva:

1. Se escribe $y = f(x)$.

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

## Fórmula de la Función Inversa:

**Pasos:** Para obtener la fórmula algebraica de la función inversa de una función inyectiva:

1. Se escribe $y = f(x)$.
2. Se intercambia $x$ por $y$.

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

## Fórmula de la Función Inversa:

**Pasos:** Para obtener la fórmula algebraica de la función inversa de una función inyectiva:

1. Se escribe $y = f(x)$.
2. Se intercambia $x$ por $y$.
3. Se despeja $y$ para determinar $f^{-1}(x)$.

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo 1:** Determinar la función inversa de $f(x) = \dfrac{x}{2} - 5$.

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo 1:** Determinar la función inversa de $f(x) = \dfrac{x}{2} - 5$.

**Solución:**

$f(x) = \frac{x}{2} - 5$,

$y = \frac{x}{2} - 5$, intercambiando $f(x)$ por $y$

$x = \frac{y}{2} - 5$, intercambiando $y$ por $x$

$x + 5 = \frac{y}{2}$, transponiendo el 5

$2(x+5) = y$, multiplicando por 2 cada lado de la ecuación

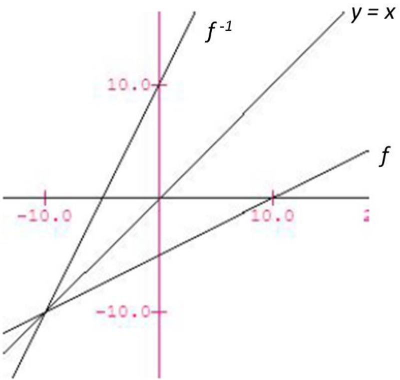
$2x + 10 = y$, 1 propiedad distributiva

$y = 2x + 10$, dando vuelta a la expresión anterior

$f^{-1}(x) = 2x + 10$ intercambiando $y$ por $f^{-1}(x)$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

Gráfica de $f^{-1}$ :



# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo 1:** Determinar la función inversa de $f(x) = 3x - 5$.

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo 1:** Determinar la función inversa de $f(x) = 3x - 5$.

<u>Solución</u>

$f(x) = 3x - 5$

$y = 3x - 5$

$x = 3y - 5$

$x + 5 = 3y$

$\frac{x+5}{3} = y$

$y = \frac{x+5}{3}$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo 1:** Determinar la función inversa de $f(x) = 3x - 5$.

<u>Solución</u>

$f(x) = 3x - 5$

$y = 3x - 5$

$x = 3y - 5$

$x + 5 = 3y$

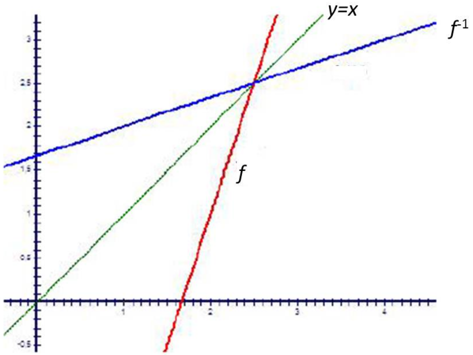
$\frac{x+5}{3} = y$

$y = \frac{x+5}{3}$

Por lo tanto, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{3}$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

Gráfica de $f^{-1}$ :



# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo 1:** Determinar la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo 1:** Determinar la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

**Solución:**

$f(x) = x^3 + 2$

$y = x^3 + 2$

$x = y^3 + 2$

$x - 2 = y^3$

$\sqrt[3]{x-2} = y$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Ejemplo 1:** Determinar la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

**Solución:**

$f(x) = x^3 + 2$

$y = x^3 + 2$

$x = y^3 + 2$

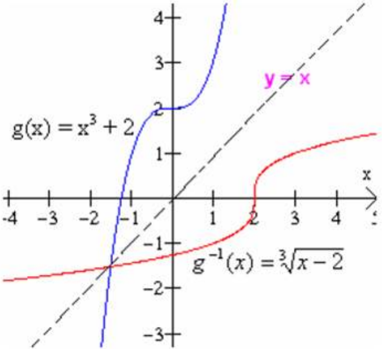
$x - 2 = y^3$

$\sqrt[3]{x - 2} = y$

$y = \sqrt[3]{x - 2} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

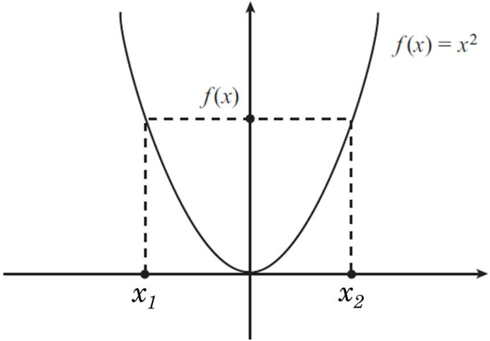
# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

Gráfica de $f^{-1}$ :



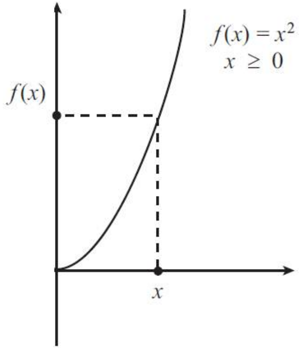
# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

Consideremos la función $f(x) = x^2$. Existe por lo menos una línea horizontal que corta a su gráfica en más de un punto. Por lo tanto, no tiene función inversa.



# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

Si restringimos el dominio de la función $f(x) = x^2$ se manera tal que $x \geq 0$, entonces la nueva función es inyectiva. Por lo tanto, tiene función inversa.



# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Construcción de la fórmula de $f^{-1}$:**

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Construcción de la fórmula de $f^{-1}$:**

$$f(x) = x^2$$

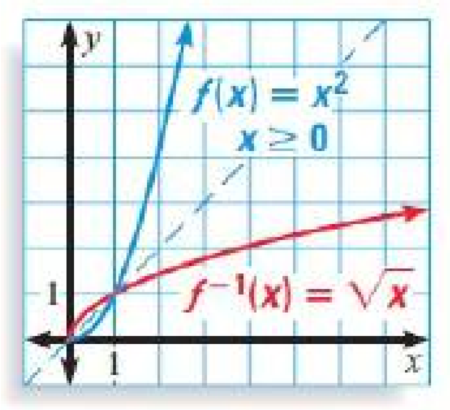
$$y = x^2$$

$$x = y^2$$

$$\sqrt{x} = y$$

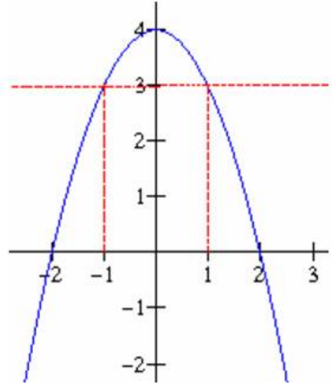
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas



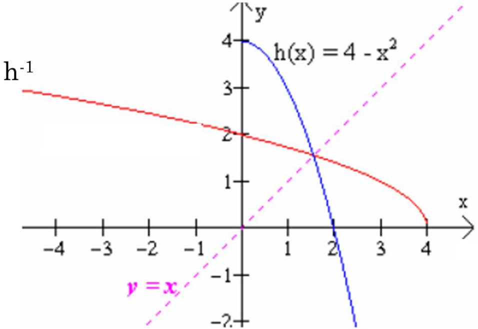
# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

Como otro ejemplo, consideremos la función $h(x) = 4 - x^2$. Existe por lo menos una línea horizontal que corta a su gráfica en más de un punto.



# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

Si restringimos el dominio de la función $h(x) = 4 - x^2$ se manera tal que $x \geq 0$, entonces la nueva función es inyectiva. Por lo tanto, tiene función inversa.



# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Construcción de la fórmula de $h^{-1}$:**

$$h(x) = 4 - x^2$$

$$y = 4 - x^2$$

$$x = 4 - y^2$$

$$y^2 = 4 - x$$

$$y = \sqrt{4 - x}$$

$$h^{-1}(x) = \sqrt{4 - x}$$

# Funciones de una Variable Real y sus Gráficas

**Gráfica de la función $h$ y de su inversa $h^{-1}$:**