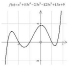

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo I

Tabla de Contenido

Objetivos:

Discutiremos:

- qué es una función polinomial

Objetivos:

Discutiremos:

- qué es una función polinomial
- propiedades de funciones polinomiales

Objetivos:

Discutiremos:

- qué es una función polinomial
- propiedades de funciones polinomiales
- ceros de funciones polinomiales

Objetivos:

Discutireмos:

- qué es una función polinomial
- propiedades de funciones polinomiales
- ceros de funciones polinomiales
- gráficas de las funciones polinomiales

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Función Polinomial de grado n

Sea n un número entero no negativo y sean a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_0 números reales, con $a_n \neq 0$.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Función Polinomial de grado n

Sea n un número entero no negativo y sean a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_0 números reales, con $a_n \neq 0$.

Definición 1: Una **función polinomial** P **de grado** n es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Función Polinomial de grado n

Sea n un número entero no negativo y sean a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_0 números reales, con $a_n \neq 0$.

Definición 1: Una **función polinomial** P **de grado** n es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

El dominio de P es el conjunto de los números reales.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Función Polinomial de grado n

Sea n un número entero no negativo y sean a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_0 números reales, con $a_n \neq 0$.

Definición 1: Una **función polinomial** P **de grado** n es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

El dominio de P es el conjunto de los números reales.

El número a_n, el coeficiente de la variable con el exponente mayor, es el **coeficiente principal** o **coeficiente líder**.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Función Polinomial de grado n

Sea n un número entero no negativo y sean a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_0 números reales, con $a_n \neq 0$.

Definición 1: Una **función polinomial** P **de grado** n es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

El dominio de P es el conjunto de los números reales.

El número a_n, el coeficiente de la variable con el exponente mayor, es el **coeficiente principal** o **coeficiente líder**.El término a_0 es el **término constante**.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplos:

1. $P(x) = -4x^5 + \pi x^2 + x + 5$: función polinomial de grado

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplos:

1. $P(x) = -4x^5 + \pi x^2 + x + 5$: función polinomial de grado 5

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplos:

1. $P(x) = -4x^5 + \pi x^2 + x + 5$: función polinomial de grado 5
2. $P(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$: función polinomial de grado

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplos:

1. $P(x) = -4x^5 + \pi x^2 + x + 5$: función polinomial de grado 5
2. $P(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$: función polinomial de grado 3

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplos:

1. $P(x) = -4x^5 + \pi x^2 + x + 5$: función polinomial de grado 5
2. $P(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$: función polinomial de grado 3
3. $P(x) = 6x - \frac{3}{4}x^2 - 6$: función polinomial de grado

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplos:

1. $P(x) = -4x^5 + \pi x^2 + x + 5$: función polinomial de grado 5
2. $P(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$: función polinomial de grado 3
3. $P(x) = 6x - \frac{3}{4}x^2 - 6$: función polinomial de grado 2

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplos:

1. $P(x) = -4x^5 + \pi x^2 + x + 5$: función polinomial de grado 5
2. $P(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$: función polinomial de grado 3
3. $P(x) = 6x - \frac{3}{4}x^2 - 6$: función polinomial de grado 2
4. $P(x) = -x^3(x+2)^4(x-2)$: función polinomial de grado

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplos:

1. $P(x) = -4x^5 + \pi x^2 + x + 5$: función polinomial de grado 5
2. $P(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$: función polinomial de grado 3
3. $P(x) = 6x - \frac{3}{4}x^2 - 6$: función polinomial de grado 2
4. $P(x) = -x^3(x+2)^4(x-2)$: función polinomial de grado 8

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplos:

1. $P(x) = -4x^5 + \pi x^2 + x + 5$: función polinomial de grado 5
2. $P(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$: función polinomial de grado 3
3. $P(x) = 6x - \frac{3}{4}x^2 - 6$: función polinomial de grado 2
4. $P(x) = -x^3(x+2)^4(x-2)$: función polinomial de grado 8
5. $P(x) = \sqrt{5}$: función polinomial de grado

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplos:

1. $P(x) = -4x^5 + \pi x^2 + x + 5$: función polinomial de grado 5
2. $P(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$: función polinomial de grado 3
3. $P(x) = 6x - \frac{3}{4}x^2 - 6$: función polinomial de grado 2
4. $P(x) = -x^3(x+2)^4(x-2)$: función polinomial de grado 8
5. $P(x) = \sqrt{5}$: función polinomial de grado 0

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplos:

1. $P(x) = -4x^5 + \pi x^2 + x + 5$: función polinomial de grado 5
2. $P(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$: función polinomial de grado 3
3. $P(x) = 6x - \frac{3}{4}x^2 - 6$: función polinomial de grado 2
4. $P(x) = -x^3(x+2)^4(x-2)$: función polinomial de grado 8
5. $P(x) = \sqrt{5}$: función polinomial de grado 0
6. $P(x) = 0$: función polinomial

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplos:

1. $P(x) = -4x^5 + \pi x^2 + x + 5$: función polinomial de grado 5
2. $P(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$: función polinomial de grado 3
3. $P(x) = 6x - \frac{3}{4}x^2 - 6$: función polinomial de grado 2
4. $P(x) = -x^3(x+2)^4(x-2)$: función polinomial de grado 8
5. $P(x) = \sqrt{5}$: función polinomial de grado 0
6. $P(x) = 0$: función polinomial que no se le asigna grado

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Propiedades de una Función Polinomial P de grado n y su Gráfica

1. El dominio de una función polinomial es el conjunto de los números reales.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Propiedades de una Función Polinomial P de grado n y su Gráfica

1. El dominio de una función polinomial es el conjunto de los números reales.
2. P es una función continua; por lo tanto, su gráfica no tiene interrupciones, huecos ni saltos.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Propiedades de una Función Polinomial P de grado n y su Gráfica

1. El dominio de una función polinomial es el conjunto de los números reales.
2. P es una función continua; por lo tanto, su gráfica no tiene interrupciones, huecos ni saltos.
3. La gráfica de P es una curva suave con esquinas redondeadas y no tiene esquinas agudas.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Propiedades de una Función Polinomial P de grado n y su Gráfica

1. El dominio de una función polinomial es el conjunto de los números reales.
2. P es una función continua; por lo tanto, su gráfica no tiene interrupciones, huecos ni saltos.
3. La gráfica de P es una curva suave con esquinas redondeadas y no tiene esquinas agudas.
4. La función P tiene, como máximo, n ceros reales; por lo tanto, su gráfica contiene, como máximo, n interceptos-x.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Propiedades de una Función Polinomial P de grado n y su Gráfica

1. El dominio de una función polinomial es el conjunto de los números reales.
2. P es una función continua; por lo tanto, su gráfica no tiene interrupciones, huecos ni saltos.
3. La gráfica de P es una curva suave con esquinas redondeadas y no tiene esquinas agudas.
4. La función P tiene, como máximo, n ceros reales; por lo tanto, su gráfica contiene, como máximo, n interceptos-x.
5. La gráfica de P tiene como máximo $n-1$ puntos donde cambia de dirección.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplo 1:

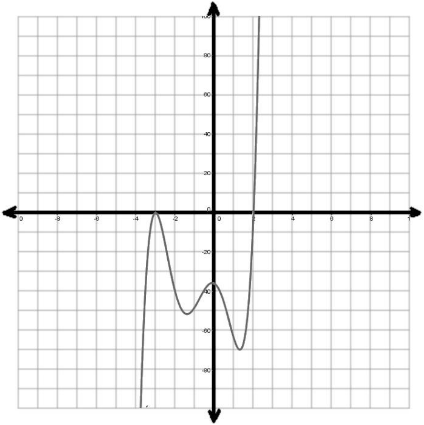

Figura: Gráfica de una función polinomial

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplo 2:

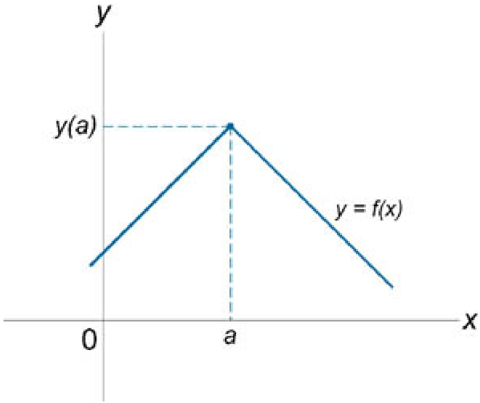

Figura: Gráfica de una función no polinomial.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplo 3:

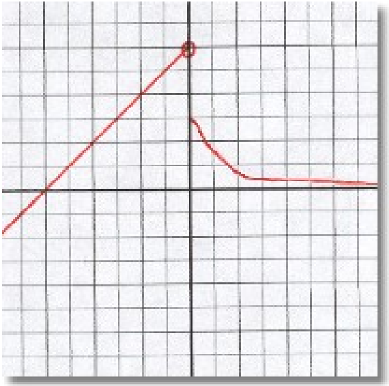

Figura: Gráfica de una función no polinomial.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Comportamiento extremo y término principal

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ n: grado del polinomio

a_n: coeficiente principal

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Comportamiento extremo y término principal

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ n: grado del polinomio

a_n: coeficiente principal

n par y $a_n > 0$	ambos extremos hacia arriba		
n par y $a_n < 0$	ambos extremos hacia abajo		
n impar y $a_n > 0$	izq: abajo, der: hacia arriba		
n impar y $a_n < 0$	izq: arriba, der: abajo		

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ceros reales de funciones polinomiales

Definición: Sea P una función polinomial y sea c un número real. Si $P(c) = 0$, entoces c es un **cero real** de P.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ceros reales de funciones polinomiales

Definición: Sea P una función polinomial y sea c un número real. Si $P(c) = 0$, entoces c es un **cero real** de P.

Ejemplos:

1. $P(x) = (x + 4)(x + 2)(x - 1)$

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ceros reales de funciones polinomiales

Definición: Sea P una función polinomial y sea c un número real. Si $P(c) = 0$, entoces c es un **cero real** de P.

Ejemplos:

1. $P(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$
   Ceros reales de P: -4, -2, 1

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ceros reales de funciones polinomiales

Definición: Sea P una función polinomial y sea c un número real. Si $P(c) = 0$, entoces c es un **cero real** de P.

Ejemplos:

1. $P(x) = (x + 4)(x + 2)(x - 1)$
   Ceros reales de P: -4, -2, 1

2. $P(x) = x^4 + x^2 + 1$

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ceros reales de funciones polinomiales

Definición: Sea P una función polinomial y sea c un número real. Si $P(c) = 0$, entoces c es un **cero real** de P.

Ejemplos:

1. $P(x) = (x + 4)(x + 2)(x - 1)$
   Ceros reales de P: -4, -2, 1

2. $P(x) = x^4 + x^2 + 1$
   No tiene ceros reales; la ecuación $x^4 + x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ceros reales de funciones polinomiales

Si P es una función polinomial y c es un número real, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. c es un *cero* real de la función P.
2. c es una *solución* real de la ecuación polinomial $P(x) = 0$.
3. $(x - c)$ es un *factor* (lineal) del polinomio $P(x)$.
4. $(c, 0)$ es un *punto de intersección* de la gráfica de P con el eje-X
5. c es un *intercepto* x de la gráfica de la función P.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ceros repetidos

Sea c un número real. Un factor $(x-c)^k$, $k>1$, k entero, da lugar a un **cero real repetido** c de **multiplicidad** k.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ceros repetidos

Sea c un número real. Un factor $(x-c)^k$, $k>1$, k entero, da lugar a un **cero real repetido** c de **multiplicidad** k.

1. Si k es impar, la gráfica *corta* el eje X en la coordenada c.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ceros repetidos

Sea c un número real. Un factor $(x-c)^k$, $k>1$, k entero, da lugar a un **cero real repetido** c de **multiplicidad** k.

1. Si k es impar, la gráfica *corta* el eje X en la coordenada c.
2. Si k es par, la gráfica *toca* (pero no corta) el eje X en la coordenada c.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ceros repetidos

Sea c un número real. Un factor $(x-c)^k$, $k>1$, k entero, da lugar a un **cero real repetido** c de **multiplicidad** k.

1. Si k es impar, la gráfica *corta* el eje X en la coordenada c.
2. Si k es par, la gráfica *toca* (pero no corta) el eje X en la coordenada c.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejercicio: Indique el grado de cada función polinomial, determine sus ceros reales y la multiplicidad de cada cero real.

1. $f(x) = (x+2)^2(x-3)^3(2x+1)^4$
2. $g(x) = x^2 + 25$
3. $h(x) = x^2(x-1)(x^2+x-6)$
4. $P(x) = x^3 - 8$
5. $f(x) = (x^2-64)(x^2+64)$

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Notas:

1. A veces, a una función polinomial de la forma $P(x) = x^n$ se le llama una **función potencia**.
2. Si tenemos una función polinomial P en forma factorizada como un producto de factores lineales de la forma $(x - c)$, donde c es un número real, podemos determinar fácilmente los ceros de P y los interceptos-x de su gráfica.

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplo 1:

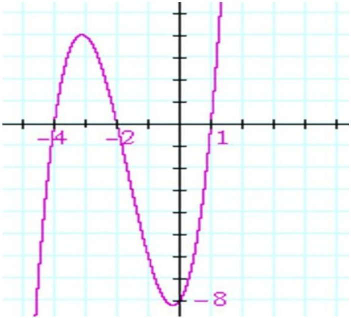

Figura:

$$P(x) = (x + 4)(x + 2)(x - 1)$$

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplo 2:

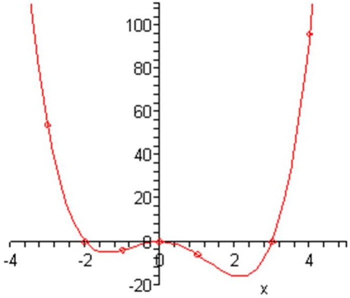

Figura:

$$\mathrm{P(x)} = \mathrm{x}^4 - x^3 - 6x^2 = x^2(x^2 - x - 6) = x^2(x-3)(x+2))$$

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejemplo 3:

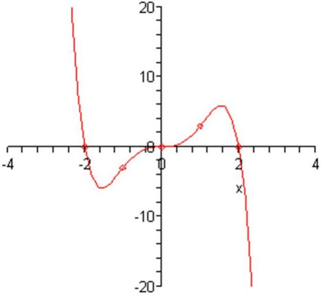

Figura:

$$\mathrm{P(x)} = \text{-}\mathrm{x}^5 + 4x^3 - = -x^3(x^2-4) = -x^3(x+2)(x-2))$$

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejercicio: Estudie la gráfica a continuación e indique cuántas soluciones reales tiene la ecuación $-x^3 + 5x^2 - 3x - 3 = 0$.

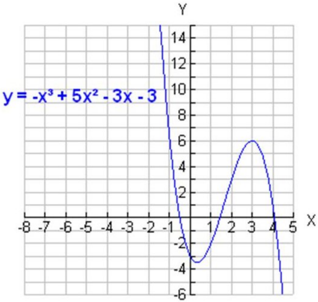

Figura: $\mathrm{P(x)} = -x^3 + 5x^2 - 3x - 3$

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejercicio: Determine los ceros reales de la función polinomial $P(x) = -x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 8x$ cuya gráfica se da a continuación.

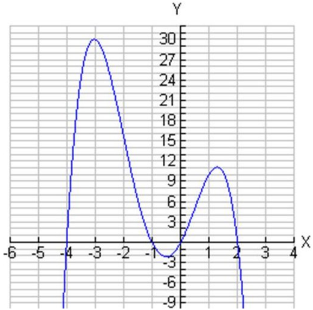

Figura: $P(x) = -x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 8x$

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejercicio: Utilice la gráfica a continuación para aproximar las soluciones de la ecuación $-x^3 + 4x^2 + 3x - 1 = 5$.

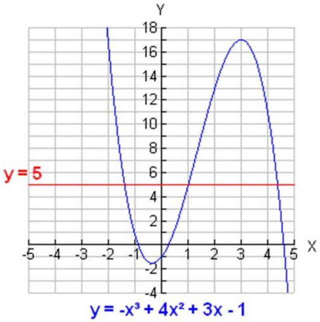

Figura: $P(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 1$

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Razón o Tasa de Cambio Promedio de una Función

Sea $[a, b]$ un intervalo (cerrado) en en dominio de una función f. Entonces, la **razón de cambio promedio** o **tasa de cambio promedio** de f con respecto a x en $[a, b]$ está dado por:

$$\textit{Razón o tasa de cambio promedio} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Razón o Tasa de Cambio Promedio de una Función

Sea $[a, b]$ un intervalo (cerrado) en en dominio de una función f. Entonces, la **razón de cambio promedio** o **tasa de cambio promedio** de f con respecto a x en $[a, b]$ está dado por:

$$\textit{Razón o tasa de cambio promedio} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Funciones Polinomiales y sus Gráficas

Ejercicio: Un cuerpo que es lanzado hacia arriba se mueve de modo que su posición después de t segundos está dada por la función $P(t) = -2t^2 + 12t + 9$ cuyos valores se expresan en metros. Determine la razón promedio (o media) de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo transcurrido, en los siguientes intervalos de tiempo:

1. $[0, 1]$
2. $[1, 2]$
3. $[2, 3]$
4. $[3, 4]$
5. $[4, 5]$

Interprete los resultados en el contexto de la situación presentada.