Funciones Racionales y Asíntotas

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo I

Tabla de Contenido

Objetivos:

Discutiremos:

- qué es una función racional

Objetivos:

Discutiremos:

- qué es una función racional
- propiedades de funciones racionales

Objetivos:

Discutiremos:

- qué es una función racional
- propiedades de funciones racionales
- gráficas de las funciones racionales

Objetivos:

Discutiremos:

- qué es una función racional
- propiedades de funciones racionales
- gráficas de las funciones racionales
- asíntotas de gráficas de funciones racionales

Funciones Racionales

Funciones Racionales

Definición: Una **función racional** r es una función de la forma $r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Supondremos que la fracción racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ está en su forma más simple.

Funciones Racionales

Funciones Racionales

Definición: Una **función racional** r es una función de la forma $r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Supondremos que la fracción racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ está en su forma más simple.

El dominio de r es el conjunto de números reales excepto aquellos para los cuales el denominador es igual a cero. Esto es, $D_r = \{x \in \Re | Q(x) \neq 0\}$

Funciones Racionales

Aunque las funciones racionales se construyen con polinomios, sus gráficas son, en general, diferentes a las gráficas de funciones polinomiales. Veamos algunos ejemplos.

Funciones Racionales

Aunque las funciones racionales se construyen con polinomios, sus gráficas son, en general, diferentes a las gráficas de funciones polinomiales. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: $r(x) = \frac{1}{x}$; $D_r = \{x \in \Re | x \neq 0\}$

Funciones Racionales

Aunque las funciones racionales se construyen con polinomios, sus gráficas son, en general, diferentes a las gráficas de funciones polinomiales. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: $r(x) = \frac{1}{x}$; $D_r = \{x \in \Re | x \neq 0\}$

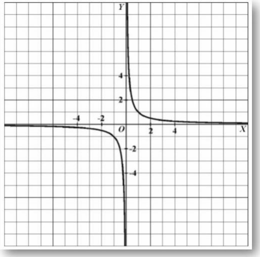


Figura: $r(x) = \frac{1}{x}$

Funciones Racionales

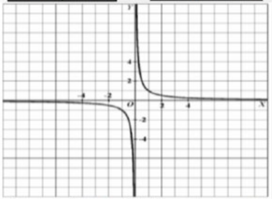
$$r(x) = \frac{1}{x};\ D_r = \{x \in \Re | x \neq 0\}$$

Funciones Racionales

$$r(x) = \frac{1}{x};\ D_r = \{x \in \Re | x \neq 0\}$$

x	r(x)
-1	-1
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.001	-1000
-0.0001	-10000

x	r(x)
1	1
0.1	10
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10000



x	r(x)
-1	-1
-10	-0.1
-100	-0.01
-1000	-0.001
-10000	-0.0001

x	r(x)
1	1
10	0.1
100	0.01
1000	0.001
10000	0.0001

Funciones Racionales

Podemos indicar lo anterior como sigue:

$$r(x) \to +\infty \text{ según (o cuando) } x \to 0^+$$

Funciones Racionales

Podemos indicar lo anterior como sigue:

$$r(x) \to +\infty \; \textit{según (o cuando)} \; x \to 0^{+}$$

$$r(x) \to -\infty \; \textit{según (o cuando)} \; x \to 0^{-}$$

Funciones Racionales

Podemos indicar lo anterior como sigue:

$$r(x) \to +\infty \textit{ según (o cuando) } x \to 0^+$$

$$r(x) \to -\infty \textit{ según (o cuando) } x \to 0^-$$

$$r(x) \to 0 \textit{ según (o cuando) } x \to +\infty$$

Funciones Racionales

Podemos indicar lo anterior como sigue:

$$r(x) \to +\infty \; \textit{según (o cuando)} \; x \to 0^+$$

$$r(x) \to -\infty \; \textit{según (o cuando)} \; x \to 0^-$$

$$r(x) \to 0 \; \textit{según (o cuando)} \; x \to +\infty$$

$$r(x) \to 0 \; \textit{según (o cuando)} \; x \to -\infty$$

Funciones Racionales

Usando notación de cálculo:

$$\lim_{x \to 0^+} r(x) = +\infty$$

Funciones Racionales

Usando notación de cálculo:

$$\lim_{x \to 0^+} r(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} r(x) = -\infty$$

Funciones Racionales

Usando notación de cálculo:

$$\lim_{x \to 0^+} r(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} r(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} r(x) = 0$$

Funciones Racionales

Usando notación de cálculo:

$$\lim_{x \to 0^+} r(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} r(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} r(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} r(x) = 0$$

Funciones Racionales:Asíntotas

Asíntotas

Los ejes de coordenadas son **asíntotas** de la gráfica de $r(x) = \frac{1}{x}$.

Funciones Racionales:Asíntotas

Asíntotas

Los ejes de coordenadas son **asíntotas** de la gráfica de $r(x) = \frac{1}{x}$. El eje vertical es una **asíntota vertical** y el eje horizontal es una **asíntota horizontal**.

Funciones Racionales:Asíntotas

Asíntotas

Los ejes de coordenadas son **asíntotas** de la gráfica de $r(x) = \frac{1}{x}$. El eje vertical es una **asíntota vertical** y el eje horizontal es una **asíntota horizontal**. También se dice que la gráfica tiene un **comportamiento asintótico** con respecto a esas dos líneas.

Funciones Racionales:Asíntotas

Asíntotas

Los ejes de coordenadas son **asíntotas** de la gráfica de $r(x) = \frac{1}{x}$. El eje vertical es una **asíntota vertical** y el eje horizontal es una **asíntota horizontal**. También se dice que la gráfica tiene un **comportamiento asintótico** con respecto a esas dos líneas.

Hay tres tipos de asíntotas:

Funciones Racionales:Asíntotas

Asíntotas

Los ejes de coordenadas son **asíntotas** de la gráfica de $r(x) = \frac{1}{x}$. El eje vertical es una **asíntota vertical** y el eje horizontal es una **asíntota horizontal**. También se dice que la gráfica tiene un **comportamiento asintótico** con respecto a esas dos líneas.

Hay tres tipos de asíntotas:

1. verticales

Funciones Racionales:Asíntotas

Asíntotas

Los ejes de coordenadas son **asíntotas** de la gráfica de $r(x) = \frac{1}{x}$. El eje vertical es una **asíntota vertical** y el eje horizontal es una **asíntota horizontal**. También se dice que la gráfica tiene un **comportamiento asintótico** con respecto a esas dos líneas.

Hay tres tipos de asíntotas:

1. verticales
2. horizontales

Funciones Racionales:Asíntotas

Asíntotas

Los ejes de coordenadas son **asíntotas** de la gráfica de $r(x) = \frac{1}{x}$. El eje vertical es una **asíntota vertical** y el eje horizontal es una **asíntota horizontal**. También se dice que la gráfica tiene un **comportamiento asintótico** con respecto a esas dos líneas.

Hay tres tipos de asíntotas:

1. verticales
2. horizontales
3. oblicuas

Funciones Racionales:Asíntotas

Asíntotas

Los ejes de coordenadas son **asíntotas** de la gráfica de $r(x) = \frac{1}{x}$. El eje vertical es una **asíntota vertical** y el eje horizontal es una **asíntota horizontal**. También se dice que la gráfica tiene un **comportamiento asintótico** con respecto a esas dos líneas.

Hay tres tipos de asíntotas:

1. verticales
2. horizontales
3. oblicuas

Sólo estudiaremos los primeros dos tipos.

Funciones Racionales: Asíntotas Verticales

Ejemplo 2: $r(x) = \frac{1}{x+2}$; $D_r = \{x \in \Re | x \neq -2\}$

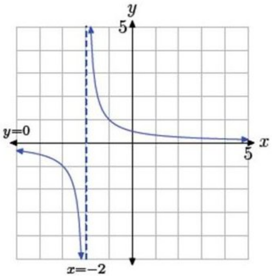


Figura: $r(x) = \frac{1}{x+2}$

Funciones Racionales: Asíntotas Verticales

$$r(x) = \frac{1}{x+2};\ D_r = \{x \in \Re | x \neq -2\}$$

Nota: La línea vertical $x = -2$ es una asíntota vertical de la gráfica de r.

Funciones Racionales: Asíntotas Verticales

$$r(x) = \frac{1}{x+2};\ D_r = \{x \in \Re | x \neq -2\}$$

Nota: La línea vertical $x = -2$ es una asíntota vertical de la gráfica de r.

Asíntotas Verticales

Definición: La línea $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si y tiende a $\pm\infty$ cuando x tiende a por la derecha o por la izquierda.

Funciones Racionales: Asíntotas Verticales

Asíntotas Verticales

Nota: En general, la línea vertical con ecuación $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de una función racional $r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, en su forma más simple o reducida, si $a \notin D_r$.

Funciones Racionales: Asíntotas Verticales

Asíntotas Verticales

Nota: En general, la línea vertical con ecuación $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de una función racional $r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, en su forma más simple o reducida, si $a \notin D_r$. Esto es, si **a** es un cero de $Q(x)$.

Funciones Racionales:Asíntotas Verticales

Ejemplo 3: $r(x) = \frac{x+2}{x-3}$; $D_r = \{x \in \Re | x \neq 3\}$

Funciones Racionales:Asíntotas Verticales

Ejemplo 3: $r(x) = \frac{x+2}{x-3}$; $D_r = \{x \in \Re | x \neq 3\}$

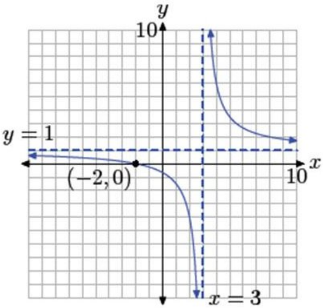


Figura: $r(x) = \frac{x+2}{x-3}$

Funciones Racionales:Asíntotas Horizontales

$$r(x) = \frac{x+2}{x-3};\ D_r = \{x \in \Re | x \neq 3\}$$

La línea vertical $x = 3$ es una asíntota vertical de la gráfica de r y la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de r.

Funciones Racionales:Asíntotas Horizontales

$$r(x) = \frac{x+2}{x-3};\ D_r = \{x \in \Re | x \neq 3\}$$

La línea vertical $x = 3$ es una asíntota vertical de la gráfica de r y la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de r.

Asíntotas Horizontales

Definición: En general, la línea horizontal con ecuación $y = b$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de una función racional r, en su forma más simple o reducida, si $r(x)$ tiende a b según x tiende a $\pm\infty$.

Funciones Racionales:Asíntotas

Ejemplo 4: $r(x) = \frac{x-2}{x^2-3x-4} = \frac{x-2}{(x+1)(x-4)}$;
$D_r = \{x \in \Re | x \neq -1, 4\}$

Funciones Racionales:Asíntotas

Ejemplo 4: $r(x) = \frac{x-2}{x^2-3x-4} = \frac{x-2}{(x+1)(x-4)}$;
$D_r = \{x \in \Re | x \neq -1, 4\}$

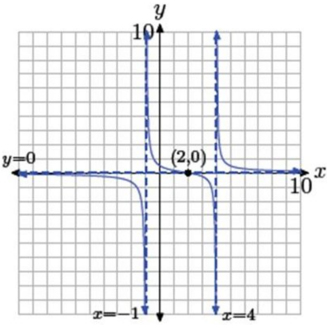


Figura: $r(x) = \frac{x+2}{(x+1))(x-4)}$

Funciones Racionales:Asíntotas

$$r(x) = \frac{x-2}{(x+1)(x-4)}; D_r = \{x \in \Re | x \neq -1, \neq 4\}$$

La gráfica de r tiene dos asíntotas verticales con ecuaciones $x = -1$ y $x = 4$ y una asíntota horizontal con ecuación $y = 0$

Funciones Racionales: Asíntotas

Nota: Sea r la función racional

$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 + b_0}$, en su forma más simple o reducida.

Funciones Racionales: Asíntotas

Nota: Sea r la función racional

$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 + b_0}$, en su forma más simple o reducida.

1. Las asíntotas verticales de la gráfica de r son las líneas verticales $x = a$, donde a es un cero de $Q(x)$, el denominador.

Funciones Racionales: Asíntotas

Nota: Sea r la función racional

$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 + b_0}$, en su forma más simple o reducida.

1. Las asíntotas verticales de la gráfica de r son las líneas verticales $x = a$, donde a es un cero de $Q(x)$, el denominador.

   Asíntotas horizontales:

Funciones Racionales: Asíntotas

Nota: Sea r la función racional

$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 + b_0}$, en su forma más simple o reducida.

1. Las asíntotas verticales de la gráfica de r son las líneas verticales $x = a$, donde a es un cero de $Q(x)$, el denominador.

2. Asíntotas horizontales:
   - a) Si $n < m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = 0$.

Funciones Racionales: Asíntotas

Nota: Sea r la función racional

$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 + b_0}$, en su forma más simple o reducida.

1. Las asíntotas verticales de la gráfica de r son las líneas verticales $x = a$, donde a es un cero de $Q(x)$, el denominador.

2. Asíntotas horizontales:
   - a) Si $n < m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = 0$.
   - b) Si $n = m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = \frac{a_n}{b_m}$

Funciones Racionales: Asíntotas

Nota: Sea r la función racional

$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 + b_0}$, en su forma más simple o reducida.

1. Las asíntotas verticales de la gráfica de r son las líneas verticales $x = a$, donde a es un cero de $Q(x)$, el denominador.

2. Asíntotas horizontales:
   - a) Si $n < m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = 0$.
   - b) Si $n = m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = \frac{a_n}{b_m}$
   - c) Si $n > m$, entonces r no tiene asíntota horizontal.

Funciones Racionales: Asíntotas

Nota: Sea r la función racional

$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 + b_0}$, en su forma más simple o reducida.

1. Las asíntotas verticales de la gráfica de r son las líneas verticales $x = a$, donde a es un cero de $Q(x)$, el denominador.
2. Asíntotas horizontales:
   - a) Si $n < m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = 0$.
   - b) Si $n = m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = \frac{a_n}{b_m}$
   - c) Si $n > m$, entonces r no tiene asíntota horizontal.

Además, los interceptos-x de la gráfica de r son los ceros de $P(x)$, el numerador.

Funciones Racionales:Asíntotas

Ejemplo 5: Graficar $r(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$.

Primero, se expresa la función r en forma factorizada.
$r(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$

Funciones Racionales:Asíntotas

Ejemplo 5: Graficar $r(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$.

Primero, se expresa la función r en forma factorizada.
$r(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$
$D_r = \{x \in \Re | x \neq -2, 3\}$

Funciones Racionales:Asíntotas

Ejemplo 5: Graficar $r(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$.

Primero, se expresa la función r en forma factorizada.
$r(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$
$D_r = \{x \in \Re | x \neq -2, 3\}$

Interceptos: intercepto-$x = 1$; intercepto-$y = \frac{1}{6}$

Funciones Racionales:Asíntotas

Ejemplo 5: Graficar $r(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$.

Primero, se expresa la función r en forma factorizada.
$r(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$
$D_r = \{x \in \Re | x \neq -2, 3\}$

Interceptos: intercepto-$x = 1$; intercepto-$y = \frac{1}{6}$

Ecuaciones de las asíntotas: Verticales: $x = -2$; $x = 3$;
Horizontal: $y = 0$

Funciones Racionales:Asíntotas

$$r(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6} = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}.$$

Funciones Racionales:Asíntotas

$$r(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6} = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}.$$

Se determinan los intervalos de prueba para luego construir un esquema de signos haciendo uso de los valores para los cuales $r(x) = 0$ y los valores para los cuales no está definida. Intervalos de prueba:$(-\infty, -2), (-2, 1), (1, 3), (3, +\infty)$

Funciones Racionales:Asíntotas

$$r(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6} = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}.$$

Se determinan los intervalos de prueba para luego construir un esquema de signos haciendo uso de los valores para los cuales $r(x) = 0$ y los valores para los cuales no está definida. Intervalos de prueba:$(-\infty, -2), (-2, 1), (1, 3), (3, +\infty)$

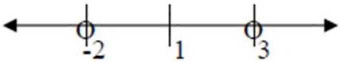


Figura: Gráfica de los Intervalos de Prueba

Funciones Racionales:Asíntotas

$$r(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6} = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}.$$

Esquema de signos:

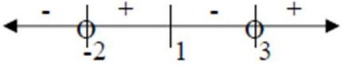


Figura: Signos de $r(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$

Funciones Racionales:Asíntotas

$$r(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6} = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}.$$

Luego, se juntan todas las piezas y se construye un esquema de la gráfica de r.

Funciones Racionales:Asíntotas

$$r(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6} = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}.$$

Luego, se juntan todas las piezas y se construye un esquema de la gráfica de r.

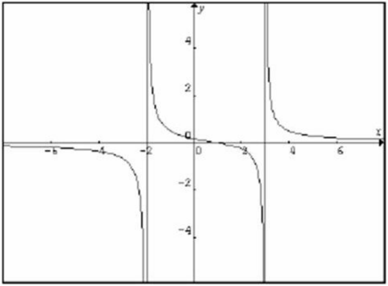


Figura: Gráfica de $r(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$

Funciones Racionales:Asíntotas

Ejercicios: Grafique cada función racional r a continuación e indique su dominio y rango. Construya un esquema de signos para determinar en qué intervalos del dominio la gráfica está sobre el eje-X y en qué intervalos está por debajo. Identifique cada asíntota y marque cada intercepto de la gráfica con los ejes de coordenadas.

1. $r(x) = \frac{-12}{x^4+4}$
2. $r(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$
3. $r(x) = \frac{x}{x^2-4}$
4. $r(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$
5. $r(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x^2-3x-4}$