Introducción a los Números Complejos

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo I

Tabla de Contenido

Objetivos:

Discutiremos:

- la unidad imaginaria i

Objetivos:

Discutiremos:

- la unidad imaginaria i
- números reales y números complejos

Objetivos:

Discutiremos:

- la unidad imaginaria i
- números reales y números complejos
- operaciones con números complejos

Objetivos:

Discutiremos:

- la unidad imaginaria i
- números reales y números complejos
- operaciones con números complejos
- soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, con $b^2 - 4ac < 0$

La Unidad Imaginaria i

Para definir un número complejo comenzamos definiendo la unidad imaginaria i

La Unidad Imaginaria i

Para definir un número complejo comenzamos definiendo la unidad imaginaria i

Definición: La **unidad imaginaria** i es un número **no** real tal que $i^2 = -1$.

La Unidad Imaginaria i

Para definir un número complejo comenzamos definiendo la unidad imaginaria i

Definición: La **unidad imaginaria** i es un número **no** real tal que $i^2 = -1$.

La definición anterior nos permite definir raíces cuadradas de números negativos.

La Unidad Imaginaria i

Para definir un número complejo comenzamos definiendo la unidad imaginaria i

Definición: La **unidad imaginaria** i es un número **no** real tal que $i^2 = -1$.

La definición anterior nos permite definir raíces cuadradas de números negativos.

Definición: Si $-r$ es un número real negativo, entonces **la raíz cuadrada principal de** $-r$ es

La Unidad Imaginaria i

Para definir un número complejo comenzamos definiendo la unidad imaginaria i

Definición: La **unidad imaginaria** i es un número **no** real tal que $i^2 = -1$.

La definición anterior nos permite definir raíces cuadradas de números negativos.

Definición: Si $-r$ es un número real negativo, entonces **la raíz cuadrada principal de** $-r$ es

$$\sqrt{-r} = i\,\sqrt{r}\ .$$

La Unidad Imaginaria i

Para definir un número complejo comenzamos definiendo la unidad imaginaria i

Definición: La **unidad imaginaria** i es un número **no** real tal que $i^2 = -1$.

La definición anterior nos permite definir raíces cuadradas de números negativos.

Definición: Si $-r$ es un número real negativo, entonces **la raíz cuadrada principal de** $-r$ es

$$\sqrt{-r} = i\ \sqrt{r}\ .$$

Las dos raíces cuadradas de $-r$ son $i\ \sqrt{r}$ y -$i\ \sqrt{r}$.

La Unidad Imaginaria i

Ejemplos:

La Unidad Imaginaria i

Ejemplos:

1. $\sqrt{-1} = i\sqrt{1} = i$

La Unidad Imaginaria i

Ejemplos:

1. $\sqrt{-1} = i\sqrt{1} = i$
2. $\sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i$

La Unidad Imaginaria i

Ejemplos:

1. $\sqrt{-1} = i\sqrt{1} = i$
2. $\sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i$
3. $\sqrt{-8} = i\sqrt{8} = 2i\sqrt{2}$

La Unidad Imaginaria i

Ejemplos:

1. $\sqrt{-1} = i\sqrt{1} = i$
2. $\sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i$
3. $\sqrt{-8} = i\sqrt{8} = 2i\sqrt{2}$
4. $\sqrt{-6} + \sqrt{-2} = i\sqrt{6} + i\sqrt{2} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})i$

La Unidad Imaginaria i

Ejemplos:

1. $\sqrt{-1} = i\sqrt{1} = i$
2. $\sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i$
3. $\sqrt{-8} = i\sqrt{8} = 2i\sqrt{2}$
4. $\sqrt{-6} + \sqrt{-2} = i\sqrt{6} + i\sqrt{2} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})i$
5. $(\sqrt{-6})(\sqrt{-2}) = (i\sqrt{6})(i\sqrt{2}) = i^2\sqrt{12} = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$

La Unidad Imaginaria i

Ejemplos:

1. $\sqrt{-1} = i\sqrt{1} = i$
2. $\sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i$
3. $\sqrt{-8} = i\sqrt{8} = 2i\sqrt{2}$
4. $\sqrt{-6} + \sqrt{-2} = i\sqrt{6} + i\sqrt{2} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})i$
5. $(\sqrt{-6})(\sqrt{-2}) = (i\sqrt{6})(i\sqrt{2}) = i^2\sqrt{12} = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$

Nota: $(\sqrt{-6})(\sqrt{-2}) \neq \sqrt{(-6)(-2)}$.

Números Complejos

Definición: Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. El número a es la **parte real** y el número b es la **parte imaginaria** del número complejo.

Números Complejos

Definición: Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. El número a es la **parte real** y el número b es la **parte imaginaria** del número complejo.

Definición: Igualdad de Números Complejos Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{z}_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$.

Números Complejos

Definición: Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. El número a es la **parte real** y el número b es la **parte imaginaria** del número complejo.

Definición: Igualdad de Números Complejos Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{z}_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Entonces $z_1 = z_2$ si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$.

Números Complejos

Definición: Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. El número a es la **parte real** y el número b es la **parte imaginaria** del número complejo.

Definición: Igualdad de Números Complejos Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{z}_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Entonces $z_1 = z_2$ si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$. Esto es, dos números complejos son **iguales** si, y sólo si, sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales.

Números Complejos

Ejemplos:

$-3 + i$ parte real: -3 parte imaginaria: 1

Números Complejos

Ejemplos:

$-3+i$	parte real: -3	parte imaginaria: 1
$\frac{1}{3}+\frac{5}{7}i$	parte real: $\frac{1}{3}$	parte imaginaria: $\frac{5}{7}$

Números Complejos

Ejemplos:

$-3+i$	parte real: -3	parte imaginaria: 1
$\frac{1}{3}+\frac{5}{7}i$	parte real: $\frac{1}{3}$	parte imaginaria: $\frac{5}{7}$
$-2i$	parte real: 0	parte imaginaria -2

Números Complejos

Ejemplos:

$-3+i$	parte real: -3	parte imaginaria: 1
$\frac{1}{3}+\frac{5}{7}i$	parte real: $\frac{1}{3}$	parte imaginaria: $\frac{5}{7}$
$-2i$	parte real: 0	parte imaginaria -2
-3	parte real: -3	parte imaginaria 0

Números Complejos

Ejemplos:

$-3+i$	parte real: -3	parte imaginaria: 1
$\frac{1}{3}+\frac{5}{7}i$	parte real: $\frac{1}{3}$	parte imaginaria: $\frac{5}{7}$
$-2i$	parte real: 0	parte imaginaria -2
-3	parte real: -3	parte imaginaria 0

Nota: Un número real se puede considerar como un número complejo con parte imaginaria 0. Por lo tanto, podemos considerar al conjunto de los números complejos como una extensión de los números reales.

Suma y Resta de Números Complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos. Entonces

Suma y Resta de Números Complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos. Entonces

- **Suma:** $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Suma y Resta de Números Complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos. Entonces

- **Suma:** $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- **Resta:** $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Operaciones con Números Complejos

Ejemplos:

1. $(-12 + 8i) + (7 - 4i) =$

Operaciones con Números Complejos

Ejemplos:

1. $(-12+8i)+(7-4i)=(-12+7)+(8-4)i=-5+4i$

Operaciones con Números Complejos

Ejemplos:

1. $(-12+8i)+(7-4i)=(-12+7)+(8-4)i=-5+4i$
2. $(3-4i)-(-9-5i)=$

Operaciones con Números Complejos

Ejemplos:

1. $(-12+8i)+(7-4i)=(-12+7)+(8-4)i=-5+4i$
2. $(3-4i)-(-9-5i)=$
   $[3-(-9)]+(-4-(-5))i=12+1i=12+i$

Operaciones con Números Complejos

Ejemplos:

1. $(-12+8i)+(7-4i) = (-12+7)+(8-4)i = -5+4i$
2. $(3-4i)-(-9-5i) =$
   $[3-(-9)]+(-4-(-5))i = 12+1i = 12+i$

Ejercicios: Lleve a cabo las operaciones indicadas.

1. $(7-12i)+(-15+7i)$
2. $\frac{1}{3}(-2+5i)-\frac{1}{6}(8-2i)$

Operaciones con Números Complejos

Multiplicación:

$$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Operaciones con Números Complejos

Multiplicación:

$$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplos:

1. $(2 + 3i) \times (3 + 2i)$

Operaciones con Números Complejos

Multiplicación:

$$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplos:

1. $(2 + 3i) \times (3 + 2i)$
   $= 2 \times 3 + 2 \times 2i + 3i \times 3 + 3i \times 2i$

Operaciones con Números Complejos

Multiplicación:

$$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplos:

1. $(2 + 3i) \times (3 + 2i)$
$= 2 \times 3 + 2 \times 2i + 3i \times 3 + 3i \times 2i$
$= 6 + 4i + 9i + 6i^2$

Operaciones con Números Complejos

Multiplicación:

$$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplos:

1. $(2 + 3i) \times (3 + 2i)$
   $= 2 \times 3 + 2 \times 2i + 3i \times 3 + 3i \times 2i$
   $= 6 + 4i + 9i + 6i^2$
   $= 6 + 13i - 6$

Operaciones con Números Complejos

Multiplicación:

$$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplos:

1. $(2 + 3i) \times (3 + 2i)$
   $= 2 \times 3 + 2 \times 2i + 3i \times 3 + 3i \times 2i$
   $= 6 + 4i + 9i + 6i^2$
   $= 6 + 13i - 6$
   $= 13i$

Operaciones con Números Complejos

Multiplicación:

$$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplos:

1. $(2 + 3i) \times (3 + 2i)$
   $= 2 \times 3 + 2 \times 2i + 3i \times 3 + 3i \times 2i$
   $= 6 + 4i + 9i + 6i^2$
   $= 6 + 13i - 6$
   $= 13i$

2. $(2 + 5i) \times (2 - 5i)$

Operaciones con Números Complejos

Multiplicación:

$$z_1 \times z_2 = (a+bi) \times (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplos:

1. $(2+3i) \times (3+2i)$
   $= 2 \times 3 + 2 \times 2i + 3i \times 3 + 3i \times 2i$
   $= 6 + 4i + 9i + 6i^2$
   $= 6 + 13i - 6$
   $= 13i$

2. $(2+5i) \times (2-5i)$
   $= 2^2 - (5i)^2$ **Recuerde:** $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$

Operaciones con Números Complejos

Multiplicación:

$$z_1 \times z_2 = (a+bi)\times(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Ejemplos:

1. $(2+3i)\times(3+2i)$
   $= 2\times 3 + 2\times 2i + 3i\times 3 + 3i\times 2i$
   $= 6 + 4i + 9i + 6i^2$
   $= 6 + 13i - 6$
   $= 13i$

2. $(2+5i)\times(2-5i)$
   $= 2^2 - (5i)^2$ **Recuerde:**$(a+b)\times(a-b) = a^2 - b^2$
   $= 4 - 5^2 \times (i)^2$

Operaciones con Números Complejos

Multiplicación:

$$z_1 \times z_2 = (a+bi) \times (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Ejemplos:

1. $(2+3i) \times (3+2i)$
   $= 2 \times 3 + 2 \times 2i + 3i \times 3 + 3i \times 2i$
   $= 6 + 4i + 9i + 6i^2$
   $= 6 + 13i - 6$
   $= 13i$

2. $(2+5i) \times (2-5i)$
   $= 2^2 - (5i)^2$ **Recuerde:** $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$
   $= 4 - 5^2 \times (i)^2$
   $= 4 - 25(-1) = 4 + 25 = 29$

Operaciones con Números Complejos

Nota: La división de números complejos se definirá en una forma parecida a la racionalización de una expresión radical. Para ello definiremos qué es el conjugado complejo de un número complejo.

Operaciones con Números Complejos

Nota: La división de números complejos se definirá en una forma parecida a la racionalización de una expresión radical. Para ello definiremos qué es el conjugado complejo de un número complejo.

Definición: El **conjugado complejo** del número complejo $z = a + bi$, denotado por $\overline{z}$, está dado por $\overline{z} = a - bi$.

Operaciones con Números Complejos

Nota: La división de números complejos se definirá en una forma parecida a la racionalización de una expresión radical. Para ello definiremos qué es el conjugado complejo de un número complejo.

Definición: El **conjugado complejo** del número complejo $z = a + bi$, denotado por $\overline{z}$, está dado por $\overline{z} = a - bi$.

Ejemplos:

1. $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$

Operaciones con Números Complejos

Nota: La división de números complejos se definirá en una forma parecida a la racionalización de una expresión radical. Para ello definiremos qué es el conjugado complejo de un número complejo.

Definición: El **conjugado complejo** del número complejo $z = a + bi$, denotado por $\overline{z}$, está dado por $\overline{z} = a - bi$.

Ejemplos:

1. $\overline{2+3i} = 2 - 3i$
2. $\overline{-1-i} = -1 + i$

Operaciones con Números Complejos

Nota: La división de números complejos se definirá en una forma parecida a la racionalización de una expresión radical. Para ello definiremos qué es el conjugado complejo de un número complejo.

Definición: El **conjugado complejo** del número complejo $z = a + bi$, denotado por $\overline{z}$, está dado por $\overline{z} = a - bi$.

Ejemplos:

1. $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$
2. $\overline{-1 - i} = -1 + i$
3. $\overline{-3i} = 3i$

Operaciones con Números Complejos

Nota: La división de números complejos se definirá en una forma parecida a la racionalización de una expresión radical. Para ello definiremos qué es el conjugado complejo de un número complejo.

Definición: El **conjugado complejo** del número complejo $z = a + bi$, denotado por $\overline{z}$, está dado por $\overline{z} = a - bi$.

Ejemplos:

1. $\overline{2+3i} = 2 - 3i$
2. $\overline{-1-i} = -1 + i$
3. $\overline{-3i} = 3i$
4. $\overline{7} = 7$

Operaciones con Números Complejos

Nota: $(a + bi) \times (a - bi) = a^2 + b^2$

Operaciones con Números Complejos

Nota: $(a+bi)\times(a-bi)=a^2+b^2$

Definición: Sean $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$ dos números complejos. Entonces

Operaciones con Números Complejos

Nota: $(a+bi)\times(a-bi)=a^2+b^2$

Definición: Sean $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$ dos números complejos. Entonces

$$z_1 \div z_2=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\times\frac{c-di}{c-di}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Operaciones con Números Complejos

Nota: $(a + bi) \times (a - bi) = a^2 + b^2$

Definición: Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos. Entonces

$$z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ejemplos:

1. $\frac{3+5i}{1-2i} = \frac{3+5i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{-7+11i}{5} = -\frac{7}{5} + \frac{11}{5}i$

Operaciones con Números Complejos

Nota: $(a+bi)\times(a-bi)=a^2+b^2$

Definición: Sean $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$ dos números complejos. Entonces

$$z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\times\frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ejemplos:

1. $\frac{3+5i}{1-2i} = \frac{3+5i}{1-2i}\times\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{-7+11i}{5} = -\frac{7}{5}+\frac{11}{5}i$
2. $\frac{7+3i}{4i} = \frac{7+3i}{4i}\times\frac{-4i}{-4i} = \frac{12-28i}{16} = -\frac{3}{4}-\frac{7}{4}i$

Raíces Complejas de Ecuaciones Cuadráticas

Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Raíces Complejas de Ecuaciones Cuadráticas

Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales. Pero en el sistema de los números complejos la ecuación tiene soluciones, pues los números negativos tienen raíces cuadradas en el entorno expandido.

Raíces Complejas de Ecuaciones Cuadráticas

Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales. Pero en el sistema de los números complejos la ecuación tiene soluciones, pues los números negativos tienen raíces cuadradas en el entorno expandido.

Ejemplo 1: Resuelva la ecuación $x^2 + 8 = 0$

Raíces Complejas de Ecuaciones Cuadráticas

Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales. Pero en el sistema de los números complejos la ecuación tiene soluciones, pues los números negativos tienen raíces cuadradas en el entorno expandido.

Ejemplo 1: Resuelva la ecuación $x^2 + 8 = 0$

Solución: $x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 = -8 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \pm\sqrt{-8} \Leftrightarrow \mathrm{x} = \pm 2i\sqrt{2}$

Raíces Complejas de Ecuaciones Cuadráticas

Ejemplo 2: Resuelva la ecuación $x^2 + 4x + 5 = 0$

Raíces Complejas de Ecuaciones Cuadráticas

Ejemplo 2: Resuelva la ecuación $x^2 + 4x + 5 = 0$

Solución:

$a = 1$, $b = 4$, $c = 5$

$$b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 2i}{2}$$

$$= \frac{2(-2 \pm i)}{2}$$

$$= -2 \pm i$$