Ceros Complejos de Polinomios

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo II

Tabla de Contenido

Objetivos:

Discutiremos:

- el Teorema Fundamental del Álgebra

Objetivos:

Discutiremos:

- el Teorema Fundamental del Álgebra
- el Teorema de la Factorización Completa

Objetivos:

Discutiremos:

- el Teorema Fundamental del Álgebra
- el Teorema de la Factorización Completa
- el Teorema del Número Exacto de Ceros

Objetivos:

Discutiremos:

- el Teorema Fundamental del Álgebra
- el Teorema de la Factorización Completa
- el Teorema del Número Exacto de Ceros
- el Teorema de los Ceros Complejos Conjugados

Objetivos:

Discutiremos:

- el Teorema Fundamental del Álgebra
- el Teorema de la Factorización Completa
- el Teorema del Número Exacto de Ceros
- el Teorema de los Ceros Complejos Conjugados
- el Teorema Lineal y Factores Cuadráticos Irreducibles

Ceros Complejos de Polinomios

El siguiente teorema sirve de base para el proceso de factorizar polinomios y resolver ecuaciones polinomiales.

Ceros Complejos de Polinomios

El siguiente teorema sirve de base para el proceso de factorizar polinomios y resolver ecuaciones polinomiales.

Teorema Fundamental del Álgebra

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(n \geq 1, a_n \neq 0)$ con coeficientes numéricos complejos tiene por lo menos un cero complejo.

Ceros Complejos de Polinomios

El siguiente teorema sirve de base para el proceso de factorizar polinomios y resolver ecuaciones polinomiales.

Teorema Fundamental del Álgebra

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(n \geq 1, a_n \neq 0)$ con coeficientes numéricos complejos tiene por lo menos un cero complejo.

Ceros Complejos de Polinomios

El siguiente teorema sirve de base para el proceso de factorizar polinomios y resolver ecuaciones polinomiales.

Teorema Fundamental del Álgebra

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(n \geq 1, a_n \neq 0)$ con coeficientes numéricos complejos tiene por lo menos un cero complejo.

Nota: Como todo número real se puede considerar como un número complejo, el teorema también aplica a polinomios con coeficientes reales.

Ceros Complejos de Polinomios

Como consecuencia del Teorema Fundamental del Álgebra y el Teorema del Factor todo polinomio de grado $n \geq 1$ puede ser factorizado como un producto de n factores lineales. Algunos de los factores se pudieran repetir.

Ceros Complejos de Polinomios

Como consecuencia del Teorema Fundamental del Álgebra y el Teorema del Factor todo polinomio de grado $n \geq 1$ puede ser factorizado como un producto de n factores lineales. Algunos de los factores se pudieran repetir.

Teorema de la Factorización Completa

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen números complejos $a, c_1, c_2, \ldots, c_n$, donde $a \neq 0$, tales que $P(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n)$.

Ceros Complejos de Polinomios

Como consecuencia del Teorema Fundamental del Álgebra y el Teorema del Factor todo polinomio de grado $n \geq 1$ puede ser factorizado como un producto de n factores lineales. Algunos de los factores se pudieran repetir.

Teorema de la Factorización Completa

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen números complejos $a, c_1, c_2, \ldots, c_n$, donde $a \neq 0$, tales que $P(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n)$.

Ceros Complejos de Polinomios

Como consecuencia del Teorema Fundamental del Álgebra y el Teorema del Factor todo polinomio de grado $n \geq 1$ puede ser factorizado como un producto de n factores lineales. Algunos de los factores se pudieran repetir.

Teorema de la Factorización Completa

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen números complejos $a, c_1, c_2, \ldots, c_n$, donde $a \neq 0$, tales que $P(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n)$.

Nota: Como todo número real se puede considerar como un número complejo, el teorema también aplica a polinomios con coeficientes reales.

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplo: Sea $P(x) = x^5 + 6x^3 + 9x$. Factorice $P(x)$ completamente como un producto de factores lineales.

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplo: Sea $P(x) = x^5 + 6x^3 + 9x$. Factorice $P(x)$ completamente como un producto de factores lineales.

Solución
$P(x) = x(x^4 + 6x^2 + 9)$

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplo: Sea $P(x) = x^5 + 6x^3 + 9x$. Factorice $P(x)$ completamente como un producto de factores lineales.

Solución

$P(x) = x(x^4 + 6x^2 + 9)$

$= x(x^2 + 3)(x^2 + 3) = x(x^2 + 3)^2$

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplo: Sea $P(x) = x^5 + 6x^3 + 9x$. Factorice $P(x)$ completamente como un producto de factores lineales.

Solución

$P(x) = x(x^4 + 6x^2 + 9)$

$= x(x^2 + 3)(x^2 + 3) = x(x^2 + 3)^2$

$= x((x + i\sqrt{3})(x - i\sqrt{3}))^2$

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplo: Sea $P(x) = x^5 + 6x^3 + 9x$. Factorice $P(x)$ completamente como un producto de factores lineales.

Solución

$P(x) = x(x^4 + 6x^2 + 9)$

$= x(x^2 + 3)(x^2 + 3) = x(x^2 + 3)^2$

$= x((x + i\sqrt{3})(x - i\sqrt{3}))^2$

$= x(x + i\sqrt{3})^2(x - i\sqrt{3})^2$

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplo: Sea $P(x) = x^5 + 6x^3 + 9x$. Factorice $P(x)$ completamente como un producto de factores lineales.

Solución

$P(x) = x(x^4 + 6x^2 + 9)$

$= x(x^2 + 3)(x^2 + 3) = x(x^2 + 3)^2$

$= x((x + i\sqrt{3})(x - i\sqrt{3}))^2$

$= x(x + i\sqrt{3})^2(x - i\sqrt{3})^2$

Los ceros de $P(x)$ son: 0 (simple), $-i\sqrt{3}$ (multiplicidad 2), $i\sqrt{3}$(multiplicidad 2)

Ceros Complejos de Polinomios

Teorema del Número Exacto de Ceros

Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n ceros, siempre que un cero de multiplicidad k se cuente k veces.

Ceros Complejos de Polinomios

Teorema de los Ceros Conjugados

Si el polinomio $P(x)$ de grado $n > 1$ tiene coeficientes reales, y si el número complejo $a + bi$, con $b \neq 0$ es un cero complejo de $P(x)$, entonces su conjugado complejo $a - bi$ también es un cero de $P(x)$.

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplo: Determine un polinomio de grado mínimo con coeficientes enteros que tenga como ceros -1 y $2i$.

Solución: Por el Teorema de los Ceros Conjugados, -$2i$ también es cero de $P(x)$.

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplo: Determine un polinomio de grado mínimo con coeficientes enteros que tenga como ceros -1 y $2i$.

Solución: Por el Teorema de los Ceros Conjugados, -$2i$ también es cero de $P(x)$.

$$P(x) = (x - 1)(x - 2i)(x + 2i)$$

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplo: Determine un polinomio de grado mínimo con coeficientes enteros que tenga como ceros -1 y $2i$.

Solución: Por el Teorema de los Ceros Conjugados, -$2i$ también es cero de $P(x)$.

$$P(x) = (x - 1)(x - 2i)(x + 2i)$$

$$= (x - 1)(x^2 + 4)$$

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplo: Determine un polinomio de grado mínimo con coeficientes enteros que tenga como ceros -1 y $2i$.

Solución: Por el Teorema de los Ceros Conjugados, -$2i$ también es cero de $P(x)$.

$$P(x) = (x-1)(x-2i)(x+2i)$$

$$= (x-1)(x^2+4)$$

$$= x^3+x^2+4x+4$$

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplos: Determine un polinomio $P(x)$ de grado mínimo con coeficientes enteros que tenga como ceros:

1. $2i, 2-2i;$

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplos: Determine un polinomio $P(x)$ de grado mínimo con coeficientes enteros que tenga como ceros:

1. $2i, 2-2i$; Solución: $P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 32$

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplos: Determine un polinomio $P(x)$ de grado mínimo con coeficientes enteros que tenga como ceros:

1. $2i, 2-2i$; Solución: $P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 32$
2. $-5, \sqrt{3}$;

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplos: Determine un polinomio $P(x)$ de grado mínimo con coeficientes enteros que tenga como ceros:

1. $2i, 2-2i$; Solución: $P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 32$
2. $-5, \sqrt{3}$; Solución: $P(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 15$

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplos: Determine un polinomio $P(x)$ de grado mínimo con coeficientes enteros que tenga como ceros:

1. $2i, 2-2i$; Solución: $P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 32$
2. $-5, \sqrt{3}$; Solución: $P(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 15$
3. $-2i, 2+2\sqrt{2}$;

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplos: Determine un polinomio $P(x)$ de grado mínimo con coeficientes enteros que tenga como ceros:

1. $2i, 2-2i$; Solución: $P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 32$
2. $-5, \sqrt{3}$; Solución: $P(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 15$
3. $-2i, 2+2\sqrt{2}$; Solución: $P(x) = x^4 - 4x^3 - 16x - 16$

Ceros Complejos de Polinomios

Teorema de los Factores Lineales y Factores Cuadráticos Irreducibles

Todo polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales se puede factorizar como un producto de factores lineales y factores cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplos: Sea $P(x) = x^4 + 8x^2 - 9$.

1. Factorice $P(x)$ en factores lineales y factores cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.
2. Factorice $P(x)$ completamente en factores lineales con coeficientes complejos.

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplos: Sea $P(x) = x^4 + 8x^2 - 9$.

1. Factorice $P(x)$ en factores lineales y factores cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.
2. Factorice $P(x)$ completamente en factores lineales con coeficientes complejos.

Solución

1. $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 9)$

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplos: Sea $P(x) = x^4 + 8x^2 - 9$.

1. Factorice $P(x)$ en factores lineales y factores cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.
2. Factorice $P(x)$ completamente en factores lineales con coeficientes complejos.

Solución

1. $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 9) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 9)$

Ceros Complejos de Polinomios

Ejemplos: Sea $P(x) = x^4 + 8x^2 - 9$.

1. Factorice $P(x)$ en factores lineales y factores cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.
2. Factorice $P(x)$ completamente en factores lineales con coeficientes complejos.

Solución

1. $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 9) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 9)$
2. $P(x) = (x + 1)(x - 1)(x + i\sqrt{3})(x - i\sqrt{3})$