Ceros de Polinomios

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo II

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido

Objetivos:

Discutiremos:

- el Teorema de los Ceros Racionales de Polinomios

Objetivos:

Discutiremos:

- el Teorema de los Ceros Racionales de Polinomios
- uso de la Calculadora Gráfica en la búsqueda de ceros reales

Objetivos:

Discutiremos:

- el Teorema de los Ceros Racionales de Polinomios
- uso de la Calculadora Gráfica en la búsqueda de ceros reales
- la Regla de los Signos de Descartes

Objetivos:

Discutiremos:

- el Teorema de los Ceros Racionales de Polinomios
- uso de la Calculadora Gráfica en la búsqueda de ceros reales
- la Regla de los Signos de Descartes
- el Teorema de las Cotas Inferior y Superior

Ceros de Polinomios

Teorema de los Ceros Racionales

Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, de grado $n \geq 1$, tiene números enteros como sus coeficientes numéricos, entonces todo cero racional de $P(x)$ es de la forma $\frac{p}{q}$, en su forma más simple o reducida, donde

Ceros de Polinomios

Teorema de los Ceros Racionales

Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, de grado $n \geq 1$, tiene números enteros como sus coeficientes numéricos, entonces todo cero racional de $P(x)$ es de la forma $\frac{p}{q}$, en su forma más simple o reducida, donde

- p es un factor o divisor de a_0

Ceros de Polinomios

Teorema de los Ceros Racionales

Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, de grado $n \geq 1$, tiene números enteros como sus coeficientes numéricos, entonces todo cero racional de $P(x)$ es de la forma $\frac{p}{q}$, en su forma más simple o reducida, donde

- p es un factor o divisor de a_0
- q es un factor o divisor de a_n

Ceros de Polinomios

El Teorema de los Ceros Racionales:

- Provee una herramienta para hacer un listado de todos los posibles ceros racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Ceros de Polinomios

El Teorema de los Ceros Racionales:

- Provee una herramienta para hacer un listado de todos los posibles ceros racionales de un polinomio con coeficientes enteros.
- No necesariamente todos los números en el listado serán ceros del polinomio, pero todos los ceros racionales del polinomio estarán en el listado.

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros racionales de:
$P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2.$

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros racionales de:
$P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2$.

$a_0 = 2$

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros racionales de:
$P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2.$

$a_0 = 2$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2$ (posibles valores de p)

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros racionales de:
$P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2$.

$a_0 = 2$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2$ (posibles valores de p)
$a_3 = 4$

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros racionales de:
$P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2$.

$a_0 = 2$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2$ (posibles valores de p)
$a_3 = 4$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ (posibles valores de q)

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros racionales de:
$P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2.$

$a_0 = 2$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2$ (posibles valores de p)
$a_3 = 4$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ (posibles valores de q)

posibles ceros racionales: $\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{2}{4}$

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros racionales de:
$P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2.$

$a_0 = 2$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2$ (posibles valores de p)
$a_3 = 4$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ (posibles valores de q)

posibles ceros racionales: $\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{2}{4}$
Simplificados: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm 2, \pm 1, \pm\frac{1}{2}$

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros racionales de:
$P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2.$

$a_0 = 2$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2$ (posibles valores de p)
$a_3 = 4$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ (posibles valores de q)

posibles ceros racionales: $\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{2}{4}$
Simplificados: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm 2, \pm 1, \pm\frac{1}{2}$

Los últimos dos simplificados son redundantes.

Ceros de Polinomios

Primero trataremos con $c = 1$ mediante sustitución directa.
$P(1) = 4(1)^3 - 5(1)^2 - 7(1) + 2 = -6 \neq 0$

Ceros de Polinomios

Primero trataremos con $c = 1$ mediante sustitución directa.
$P(1) = 4(1)^3 - 5(1)^2 - 7(1) + 2 = -6 \neq 0$

Por lo tanto, 1 no es un cero de $P(x)$.

Ceros de Polinomios

Primero trataremos con $c = 1$ mediante sustitución directa.
$P(1) = 4(1)^3 - 5(1)^2 - 7(1) + 2 = -6 \neq 0$

Por lo tanto, 1 no es un cero de $P(x)$.

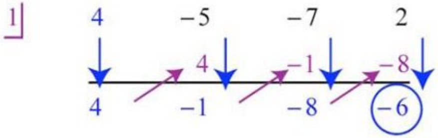
También se pudo haber verificado haciendo uso de división sintética.

Ceros de Polinomios

Primero trataremos con $c = 1$ mediante sustitución directa.
$P(1) = 4(1)^3 - 5(1)^2 - 7(1) + 2 = -6 \neq 0$

Por lo tanto, 1 no es un cero de $P(x)$.

También se pudo haber verificado haciendo uso de división sintética.

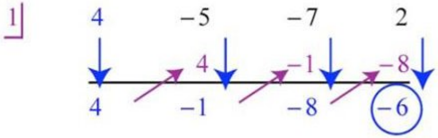


Ceros de Polinomios

Primero trataremos con $c = 1$ mediante sustitución directa.
$P(1) = 4(1)^3 - 5(1)^2 - 7(1) + 2 = -6 \neq 0$

Por lo tanto, 1 no es un cero de $P(x)$.

También se pudo haber verificado haciendo uso de división sintética.



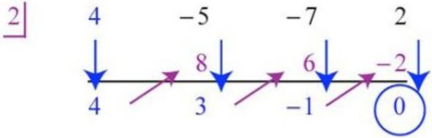
No se obtuvo residuo cero; por lo tanto 1 no es cero de $P(x)$.

Ceros de Polinomios

Tratemos ahora con $c = 2$ mediante división sintética.

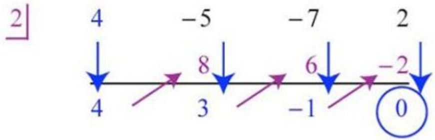
Ceros de Polinomios

Tratemos ahora con $c = 2$ mediante división sintética.



Ceros de Polinomios

Tratemos ahora con $c = 2$ mediante división sintética.



Como se obtuvo residuo cero, 2 es cero de $P(x)$.

Ceros de Polinomios

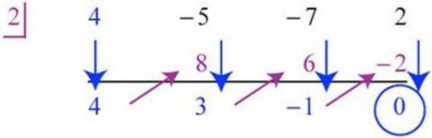
Tratemos ahora con $c = 2$ mediante división sintética.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 4 & -5 & -7 & 2 \\
  &   & 8 & 6 & -2 \\
\hline
  & 4 & 3 & -1 & 0
\end{array}
$$

Como se obtuvo residuo cero, 2 es cero de $P(x)$. Por el Teorema del Factor $(x-2)$ es un factor lineal de $P(x)$ y el cociente de la división sintética es $Q(x) = 4x^2 + 3x - 1$.

Ceros de Polinomios

Tratemos ahora con $c = 2$ mediante división sintética.



Como se obtuvo residuo cero, 2 es cero de $P(x)$. Por el Teorema del Factor $(x-2)$ es un factor lineal de $P(x)$ y el cociente de la división sintética es $Q(x) = 4x^2 + 3x - 1$. Por lo tanto,

$P(x) = (x - 2)(4x^2 + 3x - 1) = (x-2)(4x-1)(x+1)$
Los ceros de $P(x)$ son: 2, $\frac{1}{4}$, -1 .

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros de:
$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 3.$

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros de:
$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 3.$

$a_0 = 3$

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros de:
$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 3.$

$a_0 = 3$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 3$ (posibles valores de p)

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros de:
$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 3.$

$a_0 = 3$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 3$ (posibles valores de p)
$a_3 = 2$

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros de:
$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 3.$

$a_0 = 3$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 3$ (posibles valores de p)
$a_3 = 2$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2$ (posibles valores de q)

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros de:
$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 3.$

$a_0 = 3$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 3$ (posibles valores de p)
$a_3 = 2$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2$ (posibles valores de q)

Posibles ceros racionales: $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros de:
$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 3$.

$a_0 = 3$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 3$ (posibles valores de p)
$a_3 = 2$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2$ (posibles valores de q)

Posibles ceros racionales: $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

Se puede verificar que $\frac{3}{2}$ es un cero racional de $P(x)$ y que
$P(x) = (x - \frac{3}{2})(2x^2 - 4x - 2)$.

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Determine todos los ceros de:
$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 3$.

$a_0 = 3$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 3$ (posibles valores de p)
$a_3 = 2$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2$ (posibles valores de q)

Posibles ceros racionales: $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

Se puede verificar que $\frac{3}{2}$ es un cero racional de $P(x)$ y que
$P(x) = (x - \frac{3}{2})(2x^2 - 4x - 2)$.

Ejercicio: Determine los ceros restantes de $P(x)$.

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

Ejemplo: Determine todos los ceros de:
$P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6.$

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

Ejemplo: Determine todos los ceros de:
$P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6.$

$a_0 = -6$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
$a_3 = 2$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2$

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

Ejemplo: Determine todos los ceros de:
$P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6.$

$a_0 = -6$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
$a_3 = 2$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2$

Posibles ceros racionales: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

Ejemplo: Determine todos los ceros de:
$P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$.

$a_0 = -6$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
$a_3 = 2$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 2$

Posibles ceros racionales: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$

Se puede probar cada uno de los posibles ceros racionales c determinando $P(c)$. Sin embargo, explorando primero la gráfica de $y = P(x)$ usualmente podemos determinar cuáles números en el listado son los mejores candidatos para ser ceros.

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

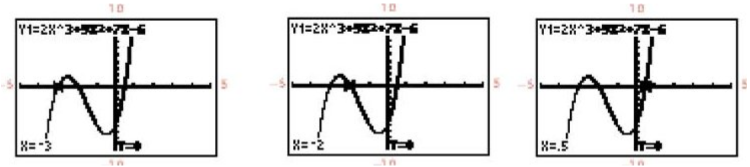


Figura: $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

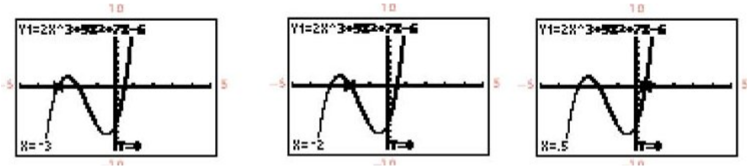


Figura: $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$

Usando las capacidades "*trace*" y "*value*" de la calculadora, vemos que $-3, -2$ y $\frac{1}{2}$ son ceros racionales de $P(x)$.

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

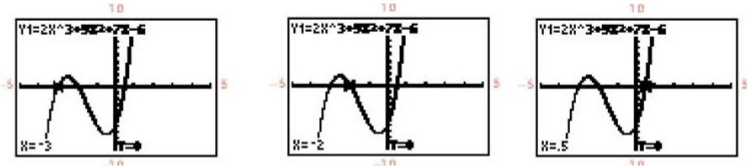


Figura: $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$

Usando las capacidades "*trace*" y "*value*" de la calculadora, vemos que $-3, -2$ y $\frac{1}{2}$ son ceros racionales de $P(x)$. Lo podemos verificar mediante evaluación directa de $P(x)$ o mediante división sintética.

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

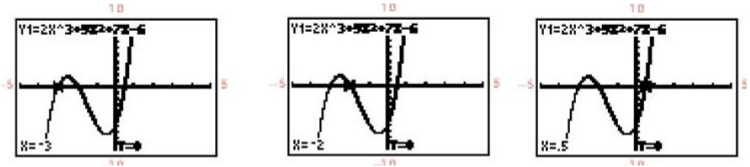


Figura: $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$

Usando las capacidades "*trace*" y "*value*" de la calculadora, vemos que $-3, -2$ y $\frac{1}{2}$ son ceros racionales de $P(x)$. Lo podemos verificar mediante evaluación directa de $P(x)$ o mediante división sintética. No hay necesidad de probar los candidatos restantes en listado de posibles ceros racionales.

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

Ejemplo: Determine todos los ceros de:
$P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5.$

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

Ejemplo: Determine todos los ceros de:
$P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5.$

$a_0 = 5$ factores o divisores: $\pm 1, \pm 5$
$a_3 = 1$ factores o divisores: ± 1

Posibles ceros racionales: $\pm 1, \pm 5$

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

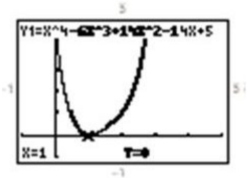


Figura: $P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5$

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

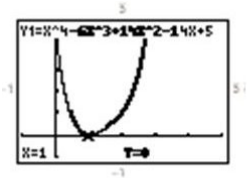


Figura: $P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5$

Analizando la gráfica de $y = P(x)$ vemos que 1 es un cero. La gráfica sugiere que en 1 hay un cambio de dirección o rebote. Por lo tanto, es posible que 1 sea un cero de múltiple.

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

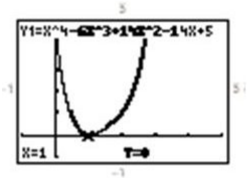


Figura: $P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5$

Analizando la gráfica de $y = P(x)$ vemos que 1 es un cero. La gráfica sugiere que en 1 hay un cambio de dirección o rebote. Por lo tanto, es posible que 1 sea un cero de múltiple.
Usando división sintética tenemos que
$P(x) = (x-1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 5)$

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

Los posibles ceros racionales del polinomio $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$ son $\pm 1, \pm 5$.

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

Los posibles ceros racionales del polinomio $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$ son $\pm 1, \pm 5$.

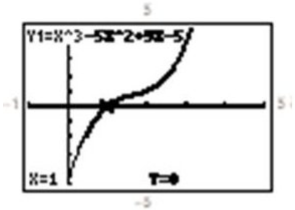


Figura: $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

Los posibles ceros racionales del polinomio $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$ son $\pm 1, \pm 5$.

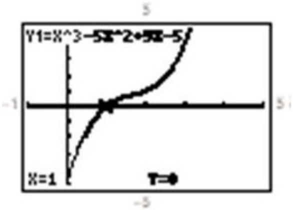


Figura: $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$

Examinando la gráfica de $Q(x)$ vemos que 1 es un cero. Luego de división sintética tenemos que $Q(x) = (x - 1)(x^2 - 4x + 5)$.

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

Se puede verificar que el polinomio $x^2 - 4x + 5$ no tiene ceros reales; sus ceros son complejos.

Ceros Reales: Uso de la Calculadora Gráfica

Se puede verificar que el polinomio $x^2 - 4x + 5$ no tiene ceros reales; sus ceros son complejos.

Por lo tanto, los ceros reales de $P(x)$ son: 1 (multiplicidad 2).

Ejercicio: Determine los ceros complejos de $P(x)$.

Ceros Reales: Ley o Regla de los Signos de Descartes

En algunos casos, la regla siguiente atribuida al filósofo y matemático francés René Descartes $(1596 - 1650)$ es útil para eliminar candidatos de listados largos de posibles ceros racionales.

Ceros Reales: Ley o Regla de los Signos de Descartes

En algunos casos, la regla siguiente atribuida al filósofo y matemático francés René Descartes $(1596 - 1650)$ es útil para eliminar candidatos de listados largos de posibles ceros racionales. La regla usa el concepto de *variación de signos*.

Ceros Reales: Ley o Regla de los Signos de Descartes

En algunos casos, la regla siguiente atribuida al filósofo y matemático francés René Descartes $(1596 - 1650)$ es útil para eliminar candidatos de listados largos de posibles ceros racionales. La regla usa el concepto de *variación de signos*. Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, escrito en orden descendente según las potencias de x (omitiendo las potencias con coeficiente numérico 0), entonces una **variación de signo** ocurre siempre que los coeficientes adyacentes tengan signos opuestos.

Ceros Reales: Ley o Regla de los Signos de Descartes

En algunos casos, la regla siguiente atribuida al filósofo y matemático francés René Descartes $(1596 - 1650)$ es útil para eliminar candidatos de listados largos de posibles ceros racionales. La regla usa el concepto de *variación de signos*. Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, escrito en orden descendente según las potencias de x (omitiendo las potencias con coeficiente numérico 0), entonces una **variación de signo** ocurre siempre que los coeficientes adyacentes tengan signos opuestos. Por ejemplo,

$$P(x) = 3x^7 - 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + x - 9$$

Ceros Reales: Ley o Regla de los Signos de Descartes

En algunos casos, la regla siguiente atribuida al filósofo y matemático francés René Descartes $(1596-1650)$ es útil para eliminar candidatos de listados largos de posibles ceros racionales. La regla usa el concepto de *variación de signos*. Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, escrito en orden descendente según las potencias de x (omitiendo las potencias con coeficiente numérico 0), entonces una **variación de signo** ocurre siempre que los coeficientes adyacentes tengan signos opuestos. Por ejemplo,

$$P(x) = 3x^7 - 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + x - 9$$

tiene tres variaciones de signos.

Ceros Reales: La Regla de los Signos de Descartes

La Regla de los Signos de Descartes

Teorema: Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales.

- El número de ceros reales positivos de $P(x)$ es igual al número de variaciones de signos de $P(x)$ o menor que eso por un número entero positivo par.

Ceros Reales: La Regla de los Signos de Descartes

La Regla de los Signos de Descartes

Teorema: Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales.

- El número de ceros reales positivos de $P(x)$ es igual al número de variaciones de signos de $P(x)$ o menor que eso por un número entero positivo par.
- El número de ceros reales negativos de $P(x)$ es igual al número de variaciones de signos de $P(-x)$ o menor que eso por un número entero positivo par.

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Aplique la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos del polinomio $P(x) = x^6 + 5x^5 + 2x^2 - x + 9$

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Aplique la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos del polinomio $P(x) = x^6 + 5x^5 + 2x^2 - x + 9$

Solución: $P(x)$ tiene dos variaciones de signos.

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Aplique la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos del polinomio $P(x) = x^6 + 5x^5 + 2x^2 - x + 9$

Solución: $P(x)$ tiene dos variaciones de signos. Por lo tanto, tiene 2 o 0 ceros positivos.

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Aplique la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos del polinomio $P(x) = x^6 + 5x^5 + 2x^2 - x + 9$

Solución: $P(x)$ tiene dos variaciones de signos. Por lo tanto, tiene 2 o 0 ceros positivos.

$P(-x) = (-x)^6 + 5(-x)^5 + 2(-x)^2 - (-x) + 9$
$= x^6 - 5x^5 + 2x^2 + x + 9$

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Aplique la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos del polinomio $P(x) = x^6 + 5x^5 + 2x^2 - x + 9$

Solución: $P(x)$ tiene dos variaciones de signos. Por lo tanto, tiene 2 o 0 ceros positivos.

$P(-x) = (-x)^6 + 5(-x)^5 + 2(-x)^2 - (-x) + 9$
$= x^6 - 5x^5 + 2x^2 + x + 9$

$P(-x)$ también tiene 2 variaciones de signo. Por lo tanto, tiene 2 o 0 ceros negativos.

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Aplique la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos del polinomio $P(x) = x^6 + 5x^5 + 2x^2 - x + 9$

Solución: $P(x)$ tiene dos variaciones de signos. Por lo tanto, tiene 2 o 0 ceros positivos.

$P(-x) = (-x)^6 + 5(-x)^5 + 2(-x)^2 - (-x) + 9$
$= x^6 - 5x^5 + 2x^2 + x + 9$

$P(-x)$ también tiene 2 variaciones de signo. Por lo tanto, tiene 2 o 0 ceros negativos.

Por lo tanto, $P(x)$ tiene 0, 2 o 4 ceros reales.

Ceros de Polinomios

Resumiendo: Posibles combinaciones de tipos de ceros:

Reales positivos	Reales negativos	Complejos
2	2	2
2	0	4
0	2	4
0	0	6

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Aplique la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos del polinomio $P(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 7$

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Aplique la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos del polinomio $P(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 7$

Solución: $P(x)$ tiene una variación de signos. Por lo tanto, tiene 1 cero real positivo.

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Aplique la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos del polinomio $P(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 7$

Solución: $P(x)$ tiene una variación de signos. Por lo tanto, tiene 1 cero real positivo.

$$P(-x) = 3(-x)^5 + 2(-x)^4 - (-x)^3 - 8(-x)^2 - 7$$
$$= -3x^5 + 2x^4 + x^3 - 8x^2 - 7$$

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Aplique la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos del polinomio $P(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 7$

Solución: $P(x)$ tiene una variación de signos. Por lo tanto, tiene 1 cero real positivo.

$P(-x) = 3(-x)^5 + 2(-x)^4 - (-x)^3 - 8(-x)^2 - 7$
$= -3x^5 + 2x^4 + x^3 - 8x^2 - 7$

$P(-x)$ tiene 2 variaciones de signos. Por lo tanto, tiene 2 o 0 ceros reales negativos.

Ceros de Polinomios

Ejemplo: Aplique la regla de los signos de Descartes para determinar el número de ceros reales positivos y negativos del polinomio $P(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 7$

Solución: $P(x)$ tiene una variación de signos. Por lo tanto, tiene 1 cero real positivo.

$P(-x) = 3(-x)^5 + 2(-x)^4 - (-x)^3 - 8(-x)^2 - 7$
$= -3x^5 + 2x^4 + x^3 - 8x^2 - 7$

$P(-x)$ tiene 2 variaciones de signos. Por lo tanto, tiene 2 o 0 ceros reales negativos.

Ceros de Polinomios

Ejercicio: Llene la tabla a continuación y realice el análisis de los posibles ceros del polinomio $P(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 7$.

Reales positivos	Reales negativos	Ceros Complejos

Ceros Reales: Teorema de las Cotas Superior e Inferior

Teorema: Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales.

1. Si se divide $P(x)$ entre $(x$ - $b)$ (con $b > 0$) por medio de la división sintética y si el renglón que contiene el cociente y el residuo son números no negativos (esto es, positivos o cero), entonces b es un cota superior para los ceros reales de $P(x)$.

Ceros Reales: Teorema de las Cotas Superior e Inferior

Teorema: Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales.

1. Si se divide $P(x)$ entre $(x$ - $b)$ (con $b > 0$) por medio de la división sintética y si el renglón que contiene el cociente y el residuo son números no negativos (esto es, positivos o cero), entonces b es un cota superior para los ceros reales de $P(x)$.

2. Si se divide $P(x)$ entre $(x$ - $a)$ (con $a < 0$) por medio de la división sintética y si el renglón que contiene el cociente y el residuo son números alternativamente positivos y negativos (las entradas iguales a ceros cuentan como positivos o negativos), entonces a es un cota inferior para los ceros reales de $P(x)$.

Ceros Reales: Teorema de las Cotas Superior e Inferior

Teorema: Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales.

1. Si se divide $P(x)$ entre $(x$ - $b)$ (con $b > 0$) por medio de la división sintética y si el renglón que contiene el cociente y el residuo son números no negativos (esto es, positivos o cero), entonces b es un cota superior para los ceros reales de $P(x)$.

2. Si se divide $P(x)$ entre $(x$ - $a)$ (con $a < 0$) por medio de la división sintética y si el renglón que contiene el cociente y el residuo son números alternativamente positivos y negativos (las entradas iguales a ceros cuentan como positivos o negativos), entonces a es un cota inferior para los ceros reales de $P(x)$.

Ceros Reales: Teorema de las Cotas Superior e Inferior

Teorema: Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales.

1. Si se divide $P(x)$ entre $(x - b)$ (con $b > 0$) por medio de la división sintética y si el renglón que contiene el cociente y el residuo son números no negativos (esto es, positivos o cero), entonces b es un cota superior para los ceros reales de $P(x)$.

2. Si se divide $P(x)$ entre $(x - a)$ (con $a < 0$) por medio de la división sintética y si el renglón que contiene el cociente y el residuo son números alternativamente positivos y negativos (las entradas iguales a ceros cuentan como positivos o negativos), entonces a es un cota inferior para los ceros reales de $P(x)$.

Ceros Reales: Teorema de las Cotas Superior e Inferior

Ejemplo: Demuestre que los ceros reales del polinomio $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ están entre -3 y 2.

Ceros Reales: Teorema de las Cotas Superior e Inferior

Ejemplo: Demuestre que los ceros reales del polinomio $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ están entre -3 y 2.

Dividiendo entre (x -2):

2	1	0	−3	2	−5
		2	4	2	8
	1	2	1	4	3

Nótese que se divide entre b >0 y todos los coeficientes del cociente y el residuo son positivos, por lo tanto 2 es una cota SUPERIOR

Ceros Reales: Teorema de las Cotas Superior e Inferior

Ejemplo: Demuestre que los ceros reales del polinomio $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ están entre -3 y 2.

Dividiendo entre (x -2):

2	1	0	−3	2	−5
		2	4	2	8
	1	2	1	4	3

Nótese que se divide entre b >0 y todos los coeficientes del cociente y el residuo son positivos, por lo tanto 2 es una cota SUPERIOR

Dividiendo entre (x + 3)

−3	1	0	−3	2	−5
		−3	9	−18	48
	1	−3	6	−16	43

Nótese que se divide entre a < 0 y los signos del cociente y residuo se alternan, por lo tanto -3 es una cota INFERIOR.

Ceros Reales: Teorema de las Cotas Superior e Inferior

Ejercicio: Determine una cota superior y una cota inferior, ambas números enteros, para los ceros reales del polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 9x + 2$.

Ceros Reales: Teorema de las Cotas Superior e Inferior

Ejercicio: Determine una cota superior y una cota inferior, ambas números enteros, para los ceros reales del polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 9x + 2$.

Ejercicios sugeridos del libro de texto

Págs. 176 - 180: Ejercicios: 1 al 8 todos; 13, 14, 17, 18, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 31, 34, 35, 37, 39, 43, 44, 49, 50, 53, 54, 55, 57, 59, 61, 67, 71, 75, 77, 83, 86, 87 al 94 impares, 96, 97, 103, 105, 108, 109, 111, 113, 119, 121, 122, 139