División Larga de Polinomios

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo II

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido

Objetivos:

Discutiremos:

- la división larga de polinomios

Objetivos:

Discutiremos:

- la división larga de polinomios
- el Algoritmo de División para Polinomios

Objetivos:

Discutiremos:

- la división larga de polinomios
- el Algoritmo de División para Polinomios
- el Teorema del Residuo

Objetivos:

Discutiremos:

- la división larga de polinomios
- el Algoritmo de División para Polinomios
- el Teorema del Residuo
- el Teorema del Factor

División larga de polinomios

La división larga de polinomios es una herramienta que se puede utilizar para factorizar completamente un polinomio.

División larga de polinomios

La división larga de polinomios es una herramienta que se puede utilizar para factorizar completamente un polinomio.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & -4x & +3 & \\
\hline
3x-2 & 6x^3 & -16x^2 & +17x & -6 \\
 & -6x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
 & & -12x^2 & +17x & \\
 & & 12x^2 & -8x & \\
\hline
 & & & 9x & -6 \\
 & & & -9x & +6 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

División larga de polinomios

La división larga de polinomios es una herramienta que se puede utilizar para factorizar completamente un polinomio.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & -4x & +3 & \\
\hline
3x-2 & 6x^3 & -16x^2 & +17x & -6 \\
 & -6x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
 & & -12x^2 & +17x & \\
 & & 12x^2 & -8x & \\
\hline
 & & & 9x & -6 \\
 & & & -9x & +6 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

Por lo tanto, $6x^3 - 16x^2 + 17x - 6 = (3x-2)(2x^2 - 4x + 3)$

División larga de polinomios

Ejemplo:

Dividir: $x^3 + 4x^2 - 3x - 12$ por $x + 2$

División larga de polinomios

Ejemplo:

Dividir: $x^3 + 4x^2 - 3x - 12$ por $x + 2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x - 7 \\
\hline
x+2 & x^3 + 4x^2 - 3x - 12 \\
 & -x^3 - 2x^2 \\
\cline{2-2}
 & \phantom{-x^3 -{}} 2x^2 - 3x \\
 & -2x^2 - 4x \\
\cline{2-2}
 & -7x - 12 \\
 & \phantom{-x^3 - 2x^2 -{}} 7x + 14 \\
\cline{2-2}
 & 2
\end{array}
$$

División larga de polinomios

Algoritmo de División para Polinomios

Teorema: Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios tal que $D(x) \neq 0$ y el grado de $D(x)$ es menor o igual que el grado de $P(x)$, entonces existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, únicos, tal que

División larga de polinomios

Algoritmo de División para Polinomios

Teorema: Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios tal que $D(x) \neq 0$ y el grado de $D(x)$ es menor o igual que el grado de $P(x)$, entonces existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, únicos, tal que

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$

División larga de polinomios

Algoritmo de División para Polinomios

Teorema: Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios tal que $D(x) \neq 0$ y el grado de $D(x)$ es menor o igual que el grado de $P(x)$, entonces existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, únicos, tal que

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$

donde $R(x) = 0$ o el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $D(x)$. Si $R(x) = 0$, entonces se dice que $D(x)$ ***divide*** a $P(x)$.

División larga de polinomios

Algoritmo de División para Polinomios

Teorema: Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios tal que $D(x) \neq 0$ y el grado de $D(x)$ es menor o igual que el grado de $P(x)$, entonces existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, únicos, tal que

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$

donde $R(x) = 0$ o el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $D(x)$. Si $R(x) = 0$, entonces se dice que $D(x)$ ***divide*** a $P(x)$.

$P(x)$: **dividendo**,

División larga de polinomios

Algoritmo de División para Polinomios

Teorema: Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios tal que $D(x) \neq 0$ y el grado de $D(x)$ es menor o igual que el grado de $P(x)$, entonces existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, únicos, tal que

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$

donde $R(x) = 0$ o el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $D(x)$. Si $R(x) = 0$, entonces se dice que $D(x)$ ***divide*** a $P(x)$.

$P(x)$: **dividendo**, $D(x)$: **divisor**

División larga de polinomios

Algoritmo de División para Polinomios

Teorema: Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios tal que $D(x) \neq 0$ y el grado de $D(x)$ es menor o igual que el grado de $P(x)$, entonces existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, únicos, tal que

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$

donde $R(x) = 0$ o el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $D(x)$. Si $R(x) = 0$, entonces se dice que $D(x)$ ***divide*** a $P(x)$.

$P(x)$: **dividendo**, $D(x)$: **divisor**
$Q(x)$: **cociente**,

División larga de polinomios

Algoritmo de División para Polinomios

Teorema: Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios tal que $D(x) \neq 0$ y el grado de $D(x)$ es menor o igual que el grado de $P(x)$, entonces existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, únicos, tal que

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$

donde $R(x) = 0$ o el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $D(x)$. Si $R(x) = 0$, entonces se dice que $D(x)$ ***divide*** a $P(x)$.

$P(x)$: **dividendo**, $D(x)$: **divisor**
$Q(x)$: **cociente**, $R(x)$: **residuo**

División larga de polinomios

Algoritmo de División para Polinomios

$$\text{dividendo} = (\text{divisor})(\text{cociente}) + \text{residuo}$$

División larga de polinomios

Algoritmo de División para Polinomios

$$\text{dividendo} = (\text{divisor})(\text{cociente}) + \text{residuo}$$

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

División larga de polinomios

Algoritmo de División para Polinomios

$$\text{dividendo} = (\text{divisor})(\text{cociente}) + \text{residuo}$$

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

$$\frac{dividendo}{divisor} = cociente + \frac{residuo}{divisor}$$

División larga de polinomios

Algoritmo de División para Polinomios

dividendo = (divisor)(cociente) + residuo

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

$$\frac{dividendo}{divisor} = cociente + \frac{residuo}{divisor}$$

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

División larga de polinomios

Ejemplo:

Dividir: $5x^3 - 16 - 20x + x^4$ por $x^2 - x - 3$

División larga de polinomios

Ejemplo:

Dividir: $5x^3 - 16 - 20x + x^4$ por $x^2 - x - 3$

- Se escribe tanto el dividendo como el divisor en orden descendente según las potencias de x.

División larga de polinomios

Ejemplo:

Dividir: $5x^3 - 16 - 20x + x^4$ por $x^2 - x - 3$

- Se escribe tanto el dividendo como el divisor en orden descendente según las potencias de x.
- Se usan marcadores de posición para los términos que no aparecen de forma explícita (i.e. sus coeficientes numéricos son cero).

División larga de polinomios

Ejemplo:

Dividir: $5x^3 - 16 - 20x + x^4$ por $x^2 - x - 3$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & x^2 & +6x & +9 \\
\hline
x^2 - x - 3 & x^4 & +5x^3 & & -20x & -16 \\
 & -x^4 & +x^3 & +3x^2 & & \\
\cline{2-4}
 & & 6x^3 & +3x^2 & -20x & \\
 & & -6x^3 & +6x^2 & +18x & \\
\cline{3-5}
 & & & 9x^2 & -2x & -16 \\
 & & & -9x^2 & +9x & +27 \\
\cline{4-6}
 & & & & 7x & +11
\end{array}
$$

División larga de polinomios

Teorema de Residuo

Teorema: Si el polinomio $P(x)$ se divide por $(x - c)$, entonces el residuo es $P(c)$.

División larga de polinomios

Teorema de Residuo

Teorema: Si el polinomio $P(x)$ se divide por $(x - c)$, entonces el residuo es $P(c)$.

Razón: Por el Algoritmo de División para Polinomios existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, únicos, tal que:
$P(x) = (x - c)Q(x) + R(x)$.

División larga de polinomios

Teorema de Residuo

Teorema: Si el polinomio $P(x)$ se divide por $(x - c)$, entonces el residuo es $P(c)$.

Razón: Por el Algoritmo de División para Polinomios existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, únicos, tal que:
$P(x) = (x - c)Q(x) + R(x)$. Como el grado del residuo $R(x)$ es menor que el grado del divisor $D(x)$, el residuo es una constante. Si se denota esa constante por r, entonces
$P(x) = (x - c)Q(x) + r$.

División larga de polinomios

Teorema de Residuo

Teorema: Si el polinomio $P(x)$ se divide por $(x - c)$, entonces el residuo es $P(c)$.

Razón: Por el Algoritmo de División para Polinomios existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, únicos, tal que:
$P(x) = (x - c)Q(x) + R(x)$. Como el grado del residuo $R(x)$ es menor que el grado del divisor $D(x)$, el residuo es una constante. Si se denota esa constante por r, entonces
$P(x) = (x - c)Q(x) + r$.
Si se establece que $x = c$,
$P(c) = (c - c)Q(c) + r = 0 \times Q(c) + c = r$
Por lo tanto, $P(c) = r$.

División larga de polinomios

Ejemplo:

Use el Teorema del Residuo para evaluar $P(x) = 4x^2 - 10x - 21$ cuando $x = 5$.

División larga de polinomios

Ejemplo:

Use el Teorema del Residuo para evaluar $P(x) = 4x^2 - 10x - 21$ cuando $x = 5$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x + 10 \\
\hline
x - 5 & 4x^2 - 10x - 21 \\
 & \underline{-\,4x^2 + 20x} \\
 & \phantom{4x^2 -{}} 10x - 21 \\
 & \underline{-\,10x + 50} \\
 & \phantom{4x^2 - 10x - {}} 29
\end{array}
$$

División larga de polinomios

Ejemplo:

Use el Teorema del Residuo para evaluar $P(x) = 4x^2 - 10x - 21$ cuando $x = 5$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\;\; 4x + 10 \\
\hline
x - 5 & 4x^2 - 10x - 21 \\
 & -4x^2 + 20x \\
\cline{2-2}
 & \qquad 10x - 21 \\
 & \qquad -10x + 50 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 29
\end{array}
$$

Como el residuo es 29, $P(5)= 29$.

División larga de polinomios

Ejemplo:

Use el Teorema del Residuo para evaluar $P(-3)$ si $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 1$.

División larga de polinomios

Ejemplo:

Use el Teorema del Residuo para evaluar $P(-3)$ si $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 1$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
\multicolumn{1}{r}{} & & 2x^2 & -10x & +30 \\
\cline{2-5}
x+3 & 2x^3 & -4x^2 & & +1 \\
 & -2x^3 & -6x^2 & & \\
\cline{2-3}
\multicolumn{1}{r}{} & & -10x^2 & & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & 10x^2 & +30x & \\
\cline{3-4}
\multicolumn{1}{r}{} & & & 30x & +1 \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & -30x & -90 \\
\cline{4-5}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & -89
\end{array}
$$

División larga de polinomios

Ejemplo:

Use el Teorema del Residuo para evaluar $P(-3)$ si $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 1$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & -10x & +30 & \\
\hline
x+3 & 2x^3 & -4x^2 & & +1 \\
 & -2x^3 & -6x^2 & & \\
\hline
 & & -10x^2 & & \\
 & & 10x^2 & +30x & \\
\hline
 & & & 30x & +1 \\
 & & & -30x & -90 \\
\hline
 & & & & -89
\end{array}
$$

Como el residuo es -89, *P(-3)*= -89.

División larga de polinomios

Teorema del Factor

Teorema: Sea c un número real. Entonces, $(x$ - $c)$ es un factor lineal de $P(x)$ si, y sólo si, $P(c) = 0$.

División larga de polinomios

Teorema del Factor

Teorema: Sea c un número real. Entonces, (x - c) es un factor lineal de $P(x)$ si, y sólo si, $P(c) = 0$.
De otra forma, $(x - c)$ es un factor lineal de $P(x)$ si, y sólo si, c es un cero real de $P(x)$.

División larga de polinomios

Teorema del Factor

Teorema: Sea c un número real. Entonces, (x - c) es un factor lineal de $P(x)$ si, y sólo si, $P(c) = 0$.
De otra forma, $(x - c)$ es un factor lineal de $P(x)$ si, y sólo si, c es un cero real de $P(x)$.

Demostración:

Si $P(x)$ factoriza de la forma $P(x) = (x - c)Q(x)$ entonces,

$$P(c) = (c - c) \times Q(c) = 0 \times Q(c) = 0$$

De otra forma, si $P(c) = 0$, entonces por el Teorema del Residuo

$$P(x) = (x - c) \times Q(x) + 0 = (x - c) \times Q(x)$$

División larga de polinomios

Ejemplo:

Determine si $(x + 3)$ es un factor de $3x^3 + 4x^2 - 18x - 3$.

División larga de polinomios

Ejemplo:

Determine si $(x + 3)$ es un factor de $3x^3 + 4x^2 - 18x - 3$.

Para determinar si $x+ 3$ es un factor de $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 18x - 3$, se divide $P(x)$ por $(x + 3)$.

División larga de polinomios

Ejemplo:

Determine si $(x + 3)$ es un factor de $3x^3 + 4x^2 - 18x - 3$.

Para determinar si x+ 3 es un factor de $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 18x - 3$, se divide $P(x)$ por $(x + 3)$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3x^2 & -5x & -3 & \\
\cline{2-5}
x+3 & 3x^3 & +4x^2 & -18x & -3 \\
 & -3x^3 & -9x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & -5x^2 & -18x & \\
 & & 5x^2 & +15x & \\
\cline{3-4}
 & & & -3x & -3 \\
 & & & 3x & +9 \\
\cline{4-5}
 & & & & 6
\end{array}
$$

División larga de polinomios

Como el residuo **no** es igual a cero, $(x + 3)$ **no** es un factor lineal de $P(x)$. Por lo tanto, -3 **no** es un cero real de $P(x)$.