Trigonometría: Resolución de Ecuaciones Trigonométricas

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo 2

Tabla de Contenido

Objetivos:

Discutiremos:

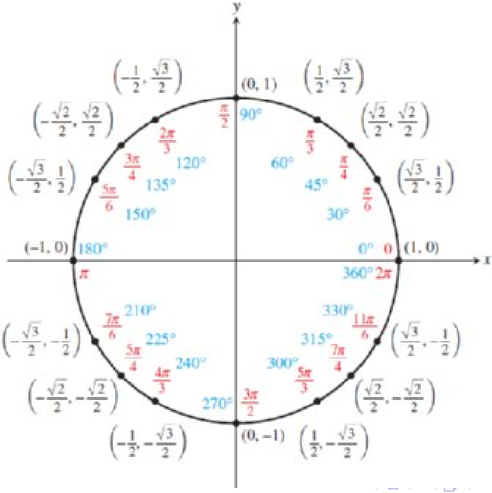
- periodicidad de las funciones trigonométricas

Objetivos:

Discutiremos:

- periodicidad de las funciones trigonométricas
- resolución de ecuaciones trigonométricas condicionales

Periodicidad de las Funciones Trigonométricas



Periodicidad de las Funciones Trigonométricas

Nota: Si $t \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $\operatorname{sen}(t) = \operatorname{sen}(t \pm 2\pi) = \operatorname{sen}(t \pm 4\pi) = ... = \operatorname{sen}(t + 2n\pi))$, n entero
2. $\cos(t) = \cos(t \pm 2\pi) = \cos(t \pm 4\pi) = ... = \cos(t + 2n\pi)$, n entero
3. $\tan(t) = \tan(t \pm \pi) = \tan(t \pm 2\pi) = ... = \tan(t + 2\pi)$, n entero

Periodicidad de las Funciones Trigonométricas

Periodicidad

Definición: Una función f es **periódica** si existe un número positivo p tal que $f(x) = f(x+p)$ para toda x en el dominio de f. El número menor p para el que f es periódica se denomina el **periodo** de f.

Periodicidad de las Funciones Trigonométricas

Periodicidad

Definición: Una función f es **periódica** si existe un número positivo p tal que $f(x) = f(x+p)$ para toda x en el dominio de f. El número menor p para el que f es periódica se denomina el **periodo** de f.

Nota: Las funciones seno, coseno, secante y cosecante son funciones periódicas con periodo 2π. Las funciones tangente y cotangente son funciones periódicas con periodo π.

Ecuaciones Trigonométricas

Previamente trabajamos con identidades trigonométricas, que son ecuaciones trigonométricas que son satisfechas por todos los valores de la variable para los cuales ambos lados de la ecuación están definidos. Ahora trabajaremos con **ecuaciones trigonométricas condicionales**; esto es, ecuaciones que son ciertas para sólo ciertos valores de la variables, si alguno. Estudiaremos técnicas para determinar los valores de la variable, si alguno, que satisfacen la ecuación.

Resolución de Ecuaciones Trigonométricas

Algunas recomendaciones:

Resolución de Ecuaciones Trigonométricas

Algunas recomendaciones:

- Decida si la ecuación es lineal o cuadrática para determinar el método de resolución.

Resolución de Ecuaciones Trigonométricas

Algunas recomendaciones:

- Decida si la ecuación es lineal o cuadrática para determinar el método de resolución.
- Si la ecuación está en términos de una función trigonométrica solamente, primero resuelva la ecuación para esa función.

Resolución de Ecuaciones Trigonométricas

Algunas recomendaciones:

- Decida si la ecuación es lineal o cuadrática para determinar el método de resolución.
- Si la ecuación está en términos de una función trigonométrica solamente, primero resuelva la ecuación para esa función.
- Si la ecuación está en términos de más de una función trigonométrica, iguale la ecuación a 0. Trate de factorizar e iguale cada factor a 0; luego, resuelva cada ecuación resultante.

Resolución de Ecuaciones Trigonométricas

Algunas recomendaciones:

- Decida si la ecuación es lineal o cuadrática para determinar el método de resolución.
- Si la ecuación está en términos de una función trigonométrica solamente, primero resuelva la ecuación para esa función.
- Si la ecuación está en términos de más de una función trigonométrica, iguale la ecuación a 0. Trate de factorizar e iguale cada factor a 0; luego, resuelva cada ecuación resultante.
- Si la ecuación es de tipo cuadrático factorice o use la forma cuadrática.

Resolución de Ecuaciones Trigonométricas

Algunas recomendaciones (Continuación):

- Puede ayudar el uso de identidades trigonométricas fundamentales.

Resolución de Ecuaciones Trigonométricas

Algunas recomendaciones (Continuación):

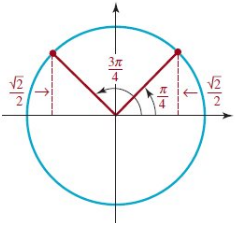
- Puede ayudar el uso de identidades trigonométricas fundamentales.
- Puede ayudar el cuadrar ambos lados de la ecuación. En este caso, debe verificar cada una de las posibles soluciones.

Ecuaciones Trigonométricas

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donde $t \in \mathbb{R}$.

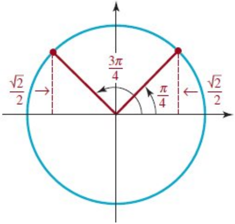
Ecuaciones Trigonométricas

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donde $t \in \mathbb{R}$.



Ecuaciones Trigonométricas

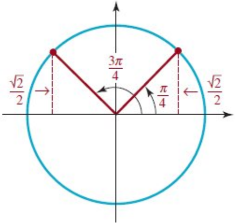
Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donde $t \in \mathbb{R}$.



Si $t \in [0, 2\pi)$, entonces $t = \frac{\pi}{4}$ o $t = \frac{3\pi}{4}$. Como la función seno es una función periódica con periodo 2π, las demás soluciones en $\mathbb{R}$ se pueden obtener sumando un múltiplo entero de 2π a las soluciones anteriores. Esto es,

Ecuaciones Trigonométricas

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donde $t \in \mathbb{R}$.



Si $t \in [0, 2\pi)$, entonces $t = \frac{\pi}{4}$ o $t = \frac{3\pi}{4}$. Como la función seno es una función periódica con periodo 2π, las demás soluciones en $\mathbb{R}$ se pueden obtener sumando un múltiplo entero de 2π a las soluciones anteriores. Esto es,

C.S.$= \{ \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n$ entero$\}$

Ecuaciones Trigonométricas

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(t) = -\cos(t)$, donde $t \in \mathbb{R}$.

Ecuaciones Trigonométricas

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(t) = -\cos(t)$, donde $t \in \mathbb{R}$.

Resolución:

$\cos(t) = -\cos(t)$

Ecuaciones Trigonométricas

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(t) = -\cos(t)$, donde $t \in \mathbb{R}$.

Resolución:

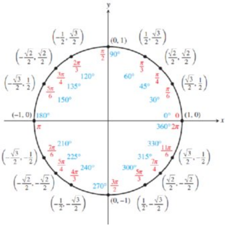
$\cos(t) = -\cos(t) \Longleftrightarrow 2\cos(t) = 0$

Ecuaciones Trigonométricas

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(t) = -\cos(t)$, donde $t \in \mathbb{R}$.

Resolución:

$$\cos(t) = -\cos(t) \Longleftrightarrow 2\cos(t) = 0 \Longleftrightarrow \cos(t) = 0$$

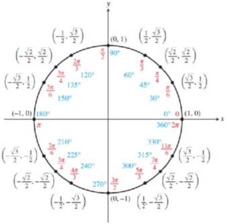


Ecuaciones Trigonométricas

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(t) = -\cos(t)$, donde $t \in \mathbb{R}$.

Resolución:

$$\cos(t) = -\cos(t) \Longleftrightarrow 2\cos(t) = 0 \Longleftrightarrow \cos(t) = 0$$



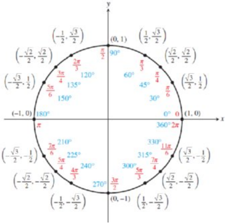
Si $t \in [0, 2\pi)$, entonces $t = \frac{\pi}{2}$ o $t = \frac{3\pi}{2}$.

Ecuaciones Trigonométricas

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(t) = -\cos(t)$, donde $t \in \mathbb{R}$.

Resolución:

$\cos(t) = -\cos(t) \Longleftrightarrow 2\cos(t) = 0 \Longleftrightarrow \cos(t) = 0$



Si $t \in [0, 2\pi)$, entonces $t = \frac{\pi}{2}$ o $t = \frac{3\pi}{2}$.

C.S.$= \{ \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n$ entero$\} = \{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n$ entero$\}$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $4\operatorname{sen}^2(t) - 8\operatorname{sen}(t) + 3 = 0$, donde $t \in \mathbb{R}$.

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $4\,\mathrm{sen}^2(t) - 8\,\mathrm{sen}(t) + 3 = 0$, donde $t \in \mathbb{R}$.

Factorizando:$(2\mathrm{sen}(t) - 3)(2\,\mathrm{sen}(t) - 1) = 0$.

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $4\operatorname{sen}^2(t) - 8\operatorname{sen}(t) + 3 = 0$, donde $t \in \mathbb{R}$.

Factorizando:$(2\operatorname{sen}(t) - 3)(2\operatorname{sen}(t) - 1) = 0$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}(t) = \frac{3}{2}$$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $4\,\text{sen}^2(t) - 8\,\text{sen}(t) + 3 = 0$, donde $t \in \mathbb{R}$.

Factorizando:$(2\text{sen}(t) - 3)(2\,\text{sen}(t) - 1) = 0$. Por lo tanto,

$$\text{sen}(t) = \tfrac{3}{2} \text{ (no tiene solución)}$$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $4\operatorname{sen}^2(t) - 8\operatorname{sen}(t) + 3 = 0$, donde $t \in \mathbb{R}$.

Factorizando:$(2\operatorname{sen}(t) - 3)(2\operatorname{sen}(t) - 1) = 0$. Por lo tanto,

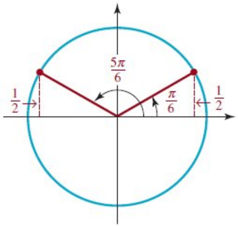
$$\operatorname{sen}(t) = \tfrac{3}{2} \text{ (no tiene solución) } \textbf{o} \operatorname{sen}(t) = \tfrac{1}{2}$$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $4\,\mathrm{sen}^2(t) - 8\,\mathrm{sen}(t) + 3 = 0$, donde $t \in \mathbb{R}$.

Factorizando:$(2\mathrm{sen}(t) - 3)(2\,\mathrm{sen}(t) - 1) = 0$. Por lo tanto,

$$\mathrm{sen}(t) = \tfrac{3}{2} \text{ (no tiene solución) } \textbf{o } \mathrm{sen}(t) = \tfrac{1}{2}$$

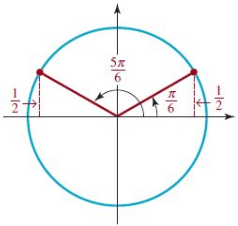


Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $4\,\text{sen}^2(t) - 8\,\text{sen}(t) + 3 = 0$, donde $t \in \mathbb{R}$.

Factorizando:$(2\text{sen}(t) - 3)(2\,\text{sen}(t) - 1) = 0$. Por lo tanto,

$$\text{sen}(t) = \frac{3}{2} \text{ (no tiene solución) } \textbf{o } \text{sen}(t) = \frac{1}{2}$$



C.S.$= \{ \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n$ entero$\}$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$, donde $x \in \mathbb{R}$.

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$, donde $x \in \mathbb{R}$.

Con el propósito de trabajar con una sola función trigonométrica, dividimos ambos lados por $\cos(x)$ para obtener

$$\tan(x) = 1.$$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$, donde $x \in \mathbb{R}$.

Con el propósito de trabajar con una sola función trigonométrica, dividimos ambos lados por $\cos(x)$ para obtener

$$\tan(x) = 1.$$

Si $x \in [0, 2\pi)$, entonces $x = \frac{\pi}{4}$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$, donde $x \in \mathbb{R}$.

Con el propósito de trabajar con una sola función trigonométrica, dividimos ambos lados por $\cos(x)$ para obtener

$$\tan(x) = 1.$$

Si $x \in [0, 2\pi)$, entonces $x = \frac{\pi}{4}$ **o** $x = \frac{5\pi}{4}$.

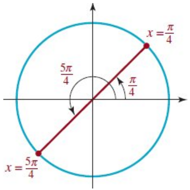
Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$, donde $x \in \mathbb{R}$.

Con el propósito de trabajar con una sola función trigonométrica, dividimos ambos lados por $\cos(x)$ para obtener

$$\tan(x) = 1.$$

Si $x \in [0, 2\pi)$, entonces $x = \frac{\pi}{4}$ **o** $x = \frac{5\pi}{4}$.



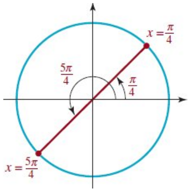
Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$, donde $x \in \mathbb{R}$.

Con el propósito de trabajar con una sola función trigonométrica, dividimos ambos lados por $\cos(x)$ para obtener

$$\tan(x) = 1.$$

Si $x \in [0, 2\pi)$, entonces $x = \frac{\pi}{4}$ **o** $x = \frac{5\pi}{4}$.



C.S.$= \{ \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, n entero$\} = \{ \frac{\pi}{4} + n\pi, n$ entero$\}$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)$, donde $\theta \in [0^\circ, 360^\circ)$.

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)$, donde $\theta \in [0^\circ, 360^\circ)$.

Solución:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) &= \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) - \operatorname{sen}(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)$, donde $\theta \in [0^\circ, 360^\circ)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) &= \operatorname{sen}(\theta) \\
\operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) - \operatorname{sen}(\theta) &= 0 \\
\operatorname{sen}(\theta)(\tan(\theta) - 1) &= 0
\end{aligned}$$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)$, donde $\theta \in [0^\circ, 360^\circ)$.

Solución:

$$\begin{gathered}\operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)\\ \operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) - \operatorname{sen}(\theta) = 0\\ \operatorname{sen}(\theta)(\tan(\theta) - 1) = 0\\ \operatorname{sen}(\theta) = 0 \text{ o } \tan(\theta) = 1\end{gathered}$$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)$, donde $\theta \in [0°, 360°)$.

Solución:

$$\begin{gathered}
\operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) = \operatorname{sen}(\theta) \\
\operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) - \operatorname{sen}(\theta) = 0 \\
\operatorname{sen}(\theta)(\tan(\theta) - 1) = 0 \\
\operatorname{sen}(\theta) = 0 \text{ o } \tan(\theta) = 1 \\
\theta = 0° \text{ o } \theta = 180° \text{ o } \theta = 45° \text{ o } \theta = 225°
\end{gathered}$$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)$, donde $\theta \in [0°, 360°)$.

Solución:

$$\begin{gathered}
\operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) = \operatorname{sen}(\theta) \\
\operatorname{sen}(\theta)\tan(\theta) - \operatorname{sen}(\theta) = 0 \\
\operatorname{sen}(\theta)(\tan(\theta) - 1) = 0 \\
\operatorname{sen}(\theta) = 0 \text{ o } \tan(\theta) = 1 \\
\theta = 0° \text{ o } \theta = 180° \text{ o } \theta = 45° \text{ o } \theta = 225°
\end{gathered}$$

C.S.= { 0°, 45°,180°, 225°}

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(x) + 1 = \operatorname{sen}(x)$, donde $x \in [0, 2\pi)$. **Ayuda:** Eleve al cuadrado cada lado de la ecuación.

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(x) + 1 = \operatorname{sen}(x)$, donde $x \in [0, 2\pi)$. **Ayuda:** Eleve al cuadrado cada lado de la ecuación.
Solución:

$$(\cos(x) + 1)^2 = \operatorname{sen}^2(x)$$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(x) + 1 = \operatorname{sen}(x)$, donde $x \in [0, 2\pi)$. **Ayuda:** Eleve al cuadrado cada lado de la ecuación.
Solución:

$$\begin{aligned} (\cos(x) + 1)^2 &= \operatorname{sen}^2(x) \\ \cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 &= \operatorname{sen}^2(x) \end{aligned}$$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(x) + 1 = \operatorname{sen}(x)$, donde $x \in [0, 2\pi)$. **Ayuda:** Eleve al cuadrado cada lado de la ecuación.
Solución:

$$
\begin{aligned}
(\cos(x) + 1)^2 &= \operatorname{sen}^2(x) \\
\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 &= \operatorname{sen}^2(x) \\
\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 &= 1 - \cos^2(x)
\end{aligned}
$$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(x) + 1 = \operatorname{sen}(x)$, donde $x \in [0, 2\pi)$. **Ayuda:** Eleve al cuadrado cada lado de la ecuación.
Solución:

$$\begin{aligned}(\cos(x) + 1)^2 &= \operatorname{sen}^2(x)\\ \cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 &= \operatorname{sen}^2(x)\\ \cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 &= 1 - \cos^2(x)\\ 2\cos^2(x) + 2\cos(x) &= 0\end{aligned}$$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(x) + 1 = \operatorname{sen}(x)$, donde $x \in [0, 2\pi)$. **Ayuda:** Eleve al cuadrado cada lado de la ecuación.
Solución:

$$
\begin{aligned}
(\cos(x) + 1)^2 &= \operatorname{sen}^2(x)\\
\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 &= \operatorname{sen}^2(x)\\
\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 &= 1 - \cos^2(x)\\
2\cos^2(x) + 2\cos(x) &= 0\\
2\cos(x)(\cos(x) + 1) &= 0
\end{aligned}
$$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(x) + 1 = \operatorname{sen}(x)$, donde $x \in [0, 2\pi)$. **Ayuda:** Eleve al cuadrado cada lado de la ecuación.
Solución:

$$\begin{gathered}
(\cos(x) + 1)^2 = \operatorname{sen}^2(x) \\
\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = \operatorname{sen}^2(x) \\
\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = 1 - \cos^2(x) \\
2\cos^2(x) + 2\cos(x) = 0 \\
2\cos(x)(\cos(x) + 1) = 0 \\
2\cos(x) = 0 \text{ o } \cos(x) + 1 = 0
\end{gathered}$$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(x) + 1 = \operatorname{sen}(x)$, donde $x \in [0, 2\pi)$. **Ayuda:** Eleve al cuadrado cada lado de la ecuación.
Solución:

$$
\begin{gathered}
(\cos(x) + 1)^2 = \operatorname{sen}^2(x) \\
\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = \operatorname{sen}^2(x) \\
\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = 1 - \cos^2(x) \\
2\cos^2(x) + 2\cos(x) = 0 \\
2\cos(x)(\cos(x) + 1) = 0 \\
2\cos(x) = 0 \text{ o } \cos(x) + 1 = 0 \\
\cos(x) = 0 \text{ o } \cos(x) = -1
\end{gathered}
$$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(x) + 1 = \operatorname{sen}(x)$, donde $x \in [0, 2\pi)$. **Ayuda:** Eleve al cuadrado cada lado de la ecuación.
Solución:

$$
\begin{gathered}
(\cos(x) + 1)^2 = \operatorname{sen}^2(x) \\
\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = \operatorname{sen}^2(x) \\
\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = 1 - \cos^2(x) \\
2\cos^2(x) + 2\cos(x) = 0 \\
2\cos(x)(\cos(x) + 1) = 0 \\
2\cos(x) = 0 \text{ o } \cos(x) + 1 = 0 \\
\cos(x) = 0 \text{ o } \cos(x) = -1
\end{gathered}
$$

Posibles soluciones: $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\cos(x) + 1 = \operatorname{sen}(x)$, donde $x \in [0, 2\pi)$. **Ayuda:** Eleve al cuadrado cada lado de la ecuación.
Solución:

$$\begin{gathered}
(\cos(x) + 1)^2 = \operatorname{sen}^2(x) \\
\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = \operatorname{sen}^2(x) \\
\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = 1 - \cos^2(x) \\
2\cos^2(x) + 2\cos(x) = 0 \\
2\cos(x)(\cos(x) + 1) = 0 \\
2\cos(x) = 0 \text{ o } \cos(x) + 1 = 0 \\
\cos(x) = 0 \text{ o } \cos(x) = -1
\end{gathered}$$

Posibles soluciones: $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi$

Ecuaciones Trigonométricas:

Ejercicio: En el ejercicio anterior, verifique que, de las tres soluciones posibles, $\frac{3\pi}{2}$ no es solución.