Funciones Exponenciales

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo II

Tabla de Contenido

Objetivos:

Discutiremos:

- propiedades de exponentes

Objetivos:

Discutiremos:

- propiedades de exponentes
- funciones exponenciales

Objetivos:

Discutireмos:

- propiedades de exponentes
- funciones exponenciales
- la función exponencial natural

Objetivos:

Discutiremos:

- propiedades de exponentes
- funciones exponenciales
- la función exponencial natural
- aplicaciones

Objetivos:

Discutiremos:

- propiedades de exponentes
- funciones exponenciales
- la función exponencial natural
- aplicaciones

Funciones Exponenciales

Propiedades de Exponentes

Sean a, b números reales positivos y x, y números reales cualesquiera. Entonces:

1. $a^x > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$; en particular $a^0 = 1$
2. $a^x a^y = a^{x+y}$
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}$
7. $a^x = a^y$ si, y sólo si, $x = y$, siempre que $a \neq 1$.

Funciones Exponenciales

Ejercicios: Resuelva las siguientes ecuaciones.

1. $5^{3x+4} = 5^{x+2}$
2. $3 \times 9^{2x} = 3^{x+1}$
3. $9^{x-2} = 3^{3x}$
4. $a^{x-3} = a^{4x+4}$; suponga que $a > 0$, $a \neq 1$.

Funciones Exponenciales

Funciones Exponenciales

Definición: Sea a$\in\mathbb{R}$, a>0, a $\neq 1$. Entonces, la **exponencial con base a**, es la función definida por $f(x) = a^x$.

Funciones Exponenciales

Funciones Exponenciales

Definición: Sea a$\in\mathbb{R}$, a>0, a $\neq 1$. Entonces, la **exponencial con base a**, es la función definida por $f(x) = a^x$. El dominio de f es $\mathbb{R} = \{\textit{números reales}\}$. Su imagen o rango es $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

Funciones Exponenciales

Funciones Exponenciales

Definición: Sea a$\in\mathbb{R}$, a>0, a $\neq 1$. Entonces, la **exponencial con base a**, es la función definida por $f(x) = a^x$. El dominio de f es $\mathbb{R}=\{\textit{números reales}\}$. Su imagen o rango es $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

Notas:

- La restricción $a > 0$ es indispensable, porque si la base a fuera cero o un número negativo, se presentarían expresiones no definidas en $\mathbb{R}$, tales como 0^{-1}, $(-2)^{\frac{1}{2}}$.

Funciones Exponenciales

Funciones Exponenciales

Definición: Sea a$\in\mathbb{R}$, a>0, a $\neq 1$. Entonces, la **exponencial con base a**, es la función definida por $f(x) = a^x$. El dominio de f es $\mathbb{R}=\{\textit{números reales}\}$. Su imagen o rango es $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

Notas:

- La restricción $a > 0$ es indispensable, porque si la base a fuera cero o un número negativo, se presentarían expresiones no definidas en $\mathbb{R}$, tales como 0^{-1}, $(-2)^{\frac{1}{2}}$.
- El caso $a = 1$ se ha excluido porque en este caso se tendría $1^x = 1$, para cada $x \in\mathbb{R}$. Esto es, $f(x) = 1^x$ es una función constante.

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las función $f(x) = 2^x$:

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las función $f(x) = 2^x$:

x	2^x	(x, y)
-3	$\frac{1}{8}$	(-3, 0.125)
-2	$\frac{1}{4}$	(-2, 0.25)
-1	$\frac{1}{2}$	(-1, 0.5)
0	1	(0, 1)
1	2	(1, 2)
2	4	(2, 4)
3	8	(3, 8)

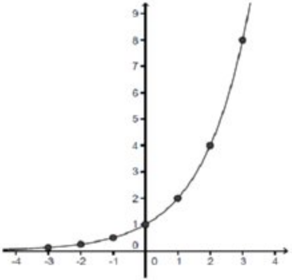


Figura: Gráfica de $f(x) = 2^x$

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las función $f(x) = 2^x$:

x	2^x	(x, y)
-3	$\frac{1}{8}$	(-3, 0.125)
-2	$\frac{1}{4}$	(-2, 0.25)
-1	$\frac{1}{2}$	(-1, 0.5)
0	1	(0, 1)
1	2	(1, 2)
2	4	(2, 4)
3	8	(3, 8)

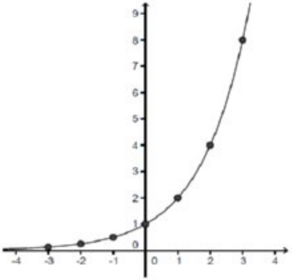


Figura: Gráfica de $f(x) = 2^x$

Verifíquelo con la calculadora gráfica.

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las función $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$:

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las función $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$:

x	$(1/2)^x$	(x, y)
-3	8	(-3, 8)
-2	4	(-2, 4)
-1	2	(-1, 2)
0	1	(0, 1)
1	$\frac{1}{2}$	(1, 0.5)
2	$\frac{1}{4}$	(2, 0.25)
3	$\frac{1}{8}$	(3, 0.125)

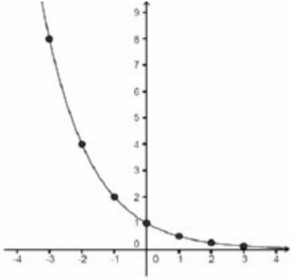


Figura: Gráfica de $f(x) = 2^x$

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las función $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$:

x	$(1/2)^x$	(x, y)
-3	8	(-3, 8)
-2	4	(-2, 4)
-1	2	(-1, 2)
0	1	(0, 1)
1	$\frac{1}{2}$	(1, 0.5)
2	$\frac{1}{4}$	(2, 0.25)
3	$\frac{1}{8}$	(3, 0.125)

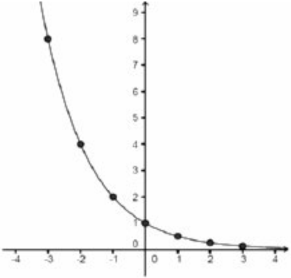


Figura: Gráfica de $f(x) = 2^x$

Verifíquelo con la calculadora gráfica.

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las funciones $f(x) = 2^x$, $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$ en el mismo sistema cartesiano:

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las funciones $f(x) = 2^x, f(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$ en el mismo sistema cartesiano:

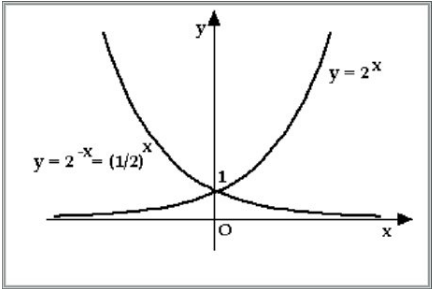


Figura: Gráficas de $f(x) = 2^x, f(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las funciones $f(x) = 2^x$, $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$ en el mismo sistema cartesiano:

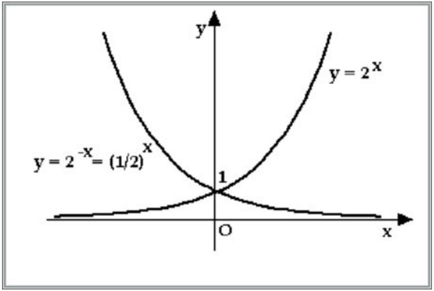


Figura: Gráficas de $f(x) = 2^x$, $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$

Verifíquelo con la calculadora gráfica.

Funciones Exponenciales

Casos básicos de la función exponencial:

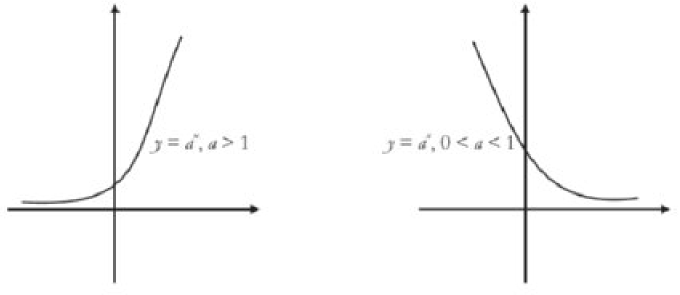


Figura: Posibles gráficas básicas de $f(x) = a^x$

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las funciones $f(x) = 1.5^x$, $f(x) = 3^x$, $f(x) = 5^x$ en el mismo sistema cartesiano:

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las funciones $f(x) = 1.5^x$, $f(x) = 3^x$, $f(x) = 5^x$ en el mismo sistema cartesiano:

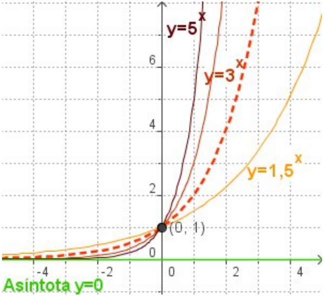


Figura: Gráficas de $f(x) = 1.5^x, f(x) = 3^x, f(x) = 5^x$

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las funciones $f(x) = 1.5^x$, $f(x) = 3^x$, $f(x) = 5^x$ en el mismo sistema cartesiano:

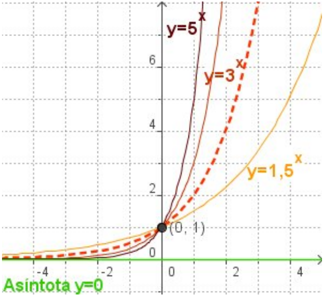


Figura: Gráficas de $f(x) = 1.5^x$, $f(x) = 3^x$, $f(x) = 5^x$

Verifíquelo con la calculadora gráfica.

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las funciones $f(x) = (\frac{2}{3})^x$, $f(x)(\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$, $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 0.5^x$ en el mismo sistema cartesiano:

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las funciones $f(x) = (\frac{2}{3})^x$, $f(x)(\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$, $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 0.5^x$ en el mismo sistema cartesiano:

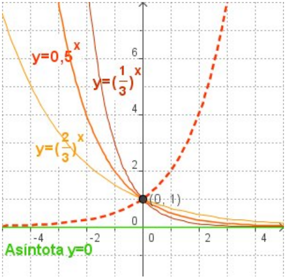


Figura: Gráficas de $f(x) = (\frac{2}{3})^x$, $f(x)(\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$, $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 0.5^x$

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las funciones $f(x) = (\frac{2}{3})^x$, $f(x)(\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$, $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 0.5^x$ en el mismo sistema cartesiano:

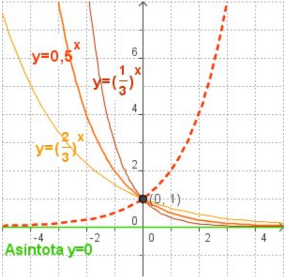


Figura: Gráficas de $f(x) = (\frac{2}{3})^x$, $f(x)(\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$, $f(x) = (\frac{1}{2})^x = 0.5^x$

Verifíquelo con la calculadora gráfica.

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $a > 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $a > 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = a^0 = 1$

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $a > 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = a^0 = 1$
3. $f(1) = a^1 = a$

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $a > 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = a^0 = 1$
3. $f(1) = a^1 = a$
4. Si $x_1 < x_2$, entonces $a^{x_1} < a^{x_2}$. Esto es, f es estrictamente creciente en todo su dominio.

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $a > 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = a^0 = 1$
3. $f(1) = a^1 = a$
4. Si $x_1 < x_2$, entonces $a^{x_1} < a^{x_2}$. Esto es, f es estrictamente creciente en todo su dominio.
5. f es biyectiva. Por lo tanto, tiene función inversa f^{-1}.

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $a > 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = a^0 = 1$
3. $f(1) = a^1 = a$
4. Si $x_1 < x_2$, entonces $a^{x_1} < a^{x_2}$. Esto es, f es estrictamente creciente en todo su dominio.
5. f es biyectiva. Por lo tanto, tiene función inversa f^{-1}.
6. Si x tiende a $+\infty$ entonces a^x tiende a $+\infty$.

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $a > 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = a^0 = 1$
3. $f(1) = a^1 = a$
4. Si $x_1 < x_2$, entonces $a^{x_1} < a^{x_2}$. Esto es, f es estrictamente creciente en todo su dominio.
5. f es biyectiva. Por lo tanto, tiene función inversa f^{-1}.
6. Si x tiende a $+\infty$ entonces a^x tiende a $+\infty$.
7. Si x tiende a $-\infty$ entonces a^x tiende a 0.

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $a > 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = a^0 = 1$
3. $f(1) = a^1 = a$
4. Si $x_1 < x_2$, entonces $a^{x_1} < a^{x_2}$. Esto es, f es estrictamente creciente en todo su dominio.
5. f es biyectiva. Por lo tanto, tiene función inversa f^{-1}.
6. Si x tiende a $+\infty$ entonces a^x tiende a $+\infty$.
7. Si x tiende a $-\infty$ entonces a^x tiende a 0.
8. El eje-X es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = a^0 = 1$

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = a^0 = 1$
3. $f(1) = a^1 = a$

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = a^0 = 1$
3. $f(1) = a^1 = a$
4. Si $x_1 < x_2$, entonces $a^{x_1} > a^{x_2}$. Esto es, f es estrictamente decreciente en todo su dominio.

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = a^0 = 1$
3. $f(1) = a^1 = a$
4. Si $x_1 < x_2$, entonces $a^{x_1} > a^{x_2}$. Esto es, f es estrictamente decreciente en todo su dominio.
5. f es biyectiva. Por lo tanto, tiene función inversa f^{-1}.

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = a^0 = 1$
3. $f(1) = a^1 = a$
4. Si $x_1 < x_2$, entonces $a^{x_1} > a^{x_2}$. Esto es, f es estrictamente decreciente en todo su dominio.
5. f es biyectiva. Por lo tanto, tiene función inversa f^{-1}.
6. Si x tiende a $+\infty$ entonces a^x tiende a 0.

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = a^0 = 1$
3. $f(1) = a^1 = a$
4. Si $x_1 < x_2$, entonces $a^{x_1} > a^{x_2}$. Esto es, f es estrictamente decreciente en todo su dominio.
5. f es biyectiva. Por lo tanto, tiene función inversa f^{-1}.
6. Si x tiende a $+\infty$ entonces a^x tiende a 0.
7. Si x tiende a $-\infty$ entonces a^x tiende a $+\infty$.

Funciones Exponenciales

Algunas propiedades de las funciones exponenciales:

Si $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$:

1. $f(x) > 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = a^0 = 1$
3. $f(1) = a^1 = a$
4. Si $x_1 < x_2$, entonces $a^{x_1} > a^{x_2}$. Esto es, f es estrictamente decreciente en todo su dominio.
5. f es biyectiva. Por lo tanto, tiene función inversa f^{-1}.
6. Si x tiende a $+\infty$ entonces a^x tiende a 0.
7. Si x tiende a $-\infty$ entonces a^x tiende a $+\infty$.
8. El eje-X es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Funciones Exponenciales

Función Exponencial Natural

Definición: La **función exponencial natural**, es la función definida por $f(x) = e^x$, donde e es la base natural.

Funciones Exponenciales

Función Exponencial Natural

Definición: La **función exponencial natural**, es la función definida por $f(x) = e^x$, donde e es la base natural.

Funciones Exponenciales

Función Exponencial Natural

Definición: La **función exponencial natural**, es la función definida por $f(x) = e^x$, donde e es la base natural.

Nota: El número es un número irracional y es usual definirlo como el límite cuando n tiende a infinito de la sucesión $(1 + \frac{1}{n})^n$.

Funciones Exponenciales

Función Exponencial Natural

Definición: La **función exponencial natural**, es la función definida por $f(x) = e^x$, donde e es la base natural.

Nota: El número es un número irracional y es usual definirlo como el límite cuando n tiende a infinito de la sucesión $(1 + \frac{1}{n})^n$. Esto es,

$$e = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

Funciones Exponenciales

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2.59374246
100	2.704813829
1000	2.716923932
10000	2.718145927
100000	2.718268237
1000000	2.718280469
10000000	2.718281693
$\downarrow$	$\downarrow$
∞	e

Figura: El número irracional e.

Funciones Exponenciales

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2.59374246
100	2.704813829
1000	2.716923932
10000	2.718145927
100000	2.718268237
1000000	2.718280469
10000000	2.718281693
$\downarrow$	$\downarrow$
∞	e

Figura: El número irracional e.

Una aproximación usual de e es $e = 2.71828$.

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las función $f(x) = e^x$:

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las función $f(x) = e^x$:

x	e^x	(x, y)
-3	e^{-3}	(-3, 0.0498)
-2	e^{-2}	(-2, 0.1353)
-1	e^{-1}	(-1, 0.3679)
0	1	(0, 1)
1	e	(1, 2.7183)
2	e^2	(2, 7.3891)

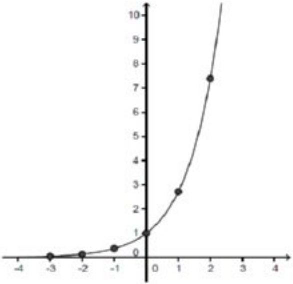


Figura: Gráfica de $f(x) = e^x$.

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Grafique las función $f(x) = e^x$:

x	e^x	(x, y)
-3	e^{-3}	(-3, 0.0498)
-2	e^{-2}	(-2, 0.1353)
-1	e^{-1}	(-1, 0.3679)
0	1	(0, 1)
1	e	(1, 2.7183)
2	e^2	(2, 7.3891)

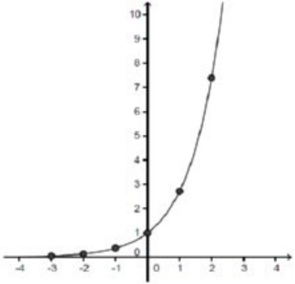


Figura: Gráfica de $f(x) = e^x$.

Verifíquelo con la calculadora gráfica.

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Use la calculadora gráfica para trazar la gráfica de las siguientes funciones exponenciales. Para cada función, indique la ecuación de cualquier asíntota de la gráfica.

1. $y = 3^{-x^2}$
2. $y = 5^{x+2} - 1$
3. $y = -2^{-|x|}$
4. $y = e^{-0}.5x$
5. $y = 3 + e^{x-2}$

Funciones Exponenciales

Aplicación: Crecimiento bacterial

Las funciones exponenciales resultan útiles para describir el crecimiento de ciertas poblaciones.

Funciones Exponenciales

Aplicación: Crecimiento bacterial

Las funciones exponenciales resultan útiles para describir el crecimiento de ciertas poblaciones. El principio básico que gobierna el crecimiento poblacional es el siguiente: mientras mayor sea la población, mayor es el número de descendientes, que, a su vez, contribuyen al crecimiento poblacional.

Funciones Exponenciales

Aplicación: Crecimiento bacterial

A manera de ejemplo, supongamos que a nivel experimental se observa que el número de bacterias en un cultivo se duplica cada día. Si hay $1,000$ ejemplares al comienzo, se obtiene la tabla siguiente, donde t es el tiempo en días y $f(t)$ es el conteo de bacterias en el tiempo t.

Funciones Exponenciales

Aplicación: Crecimiento bacterial

A manera de ejemplo, supongamos que a nivel experimental se observa que el número de bacterias en un cultivo se duplica cada día. Si hay $1,000$ ejemplares al comienzo, se obtiene la tabla siguiente, donde t es el tiempo en días y $f(t)$ es el conteo de bacterias en el tiempo t.

t(tiempo en días)	0	1	2	3	4
f(t)(conteo de bacterias)	1000	2000	4000	8000	16000

Funciones Exponenciales

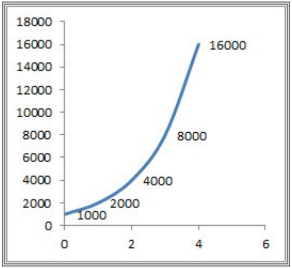
Aplicación: Crecimiento bacterial

Podemos modelar ese crecimiento bacterial de la forma $f(t) = (1,000)2^t$. Con esta fórmula se puede predecir la cantidad de bacterias en cualquier momento t.

Funciones Exponenciales

Aplicación: Crecimiento bacterial

Podemos modelar ese crecimiento bacterial de la forma $f(t) = (1,000)2^t$. Con esta fórmula se puede predecir la cantidad de bacterias en cualquier momento t. La gráfica de f se muestra a continuación.



Funciones Exponenciales

Ejercicio: Crecimiento logístico Las poblaciones animales no pueden crecer sin restricción debido a la limitación de hábitat y suministros de alimentos.

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Crecimiento logístico Las poblaciones animales no pueden crecer sin restricción debido a la limitación de hábitat y suministros de alimentos. En tales condiciones la población sigue un *modelo de crecimiento logístico*

$$P(t) = \frac{a}{1+be^{-rt}},$$

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Crecimiento logístico Las poblaciones animales no pueden crecer sin restricción debido a la limitación de hábitat y suministros de alimentos. En tales condiciones la población sigue un *modelo de crecimiento logístico*

$$P(t) = \frac{a}{1+be^{-rt}},$$

donde a, b y r son constantes positivas.

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Crecimiento logístico Las poblaciones animales no pueden crecer sin restricción debido a la limitación de hábitat y suministros de alimentos. En tales condiciones la población sigue un *modelo de crecimiento logístico*

$$P(t) = \frac{a}{1+be^{-rt}},$$

donde a, b y r son constantes positivas.

Para cierta población de peces, en un pequeño estanque $a = 1,200$, $b = 11$, $r = 0.2$ y t se mide en años. Los peces se introdujeron en el estanque en el tiempo $t = 0$.

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Crecimiento logístico (Continuación)

1. ¿Cuántos peces se introdujeron en el estanque?
2. Calcule la población luego de 10, 20 y 30 años.
3. Evalúe $P(t)$ para valores grandes de t.
4. ¿A qué valor tiende la población según t tiende a $+\infty$?
5. Grafique la función usando 80 como valor máximo de x y $1,300$ como valor máximo de y; use 0 como valor mínimo para cada variable.

Funciones Exponenciales

Aplicación: Desintegración o decaimiento radiactivo

Determinadas cantidades físicas *decrecen* o *decaen* en forma exponencial.

Funciones Exponenciales

Aplicación: Desintegración o decaimiento radiactivo

Determinadas cantidades físicas *decrecen* o *decaen* en forma exponencial. En tales casos, si a es la base de un modelo exponencial de decaimiento, entonces $0 < a < 1$. Uno de los ejemplos más comunes de decaimiento exponencial es la desintegración de una sustancia radiactiva o isótopo.

Funciones Exponenciales

Aplicación: Desintegración o decaimiento radiactivo

Vida Media o Periodo Radiactivo

Definición: La **vida media** o **periodo radiactivo** de un isótopo es el tiempo que se requiere para que la mitad de la cantidad original de una muestra se desintegre.

Funciones Exponenciales

Aplicación: Desintegración o decaimiento radiactivo

Vida Media o Periodo Radiactivo

Definición: La **vida media** o **periodo radiactivo** de un isótopo es el tiempo que se requiere para que la mitad de la cantidad original de una muestra se desintegre.

La vida media es la principal característica que distingue una sustancia radiactiva de otra.

Funciones Exponenciales

Aplicación: Desintegración o decaimiento radiactivo

Vida Media o Periodo Radiactivo

Definición: La **vida media** o **periodo radiactivo** de un isótopo es el tiempo que se requiere para que la mitad de la cantidad original de una muestra se desintegre.

La vida media es la principal característica que distingue una sustancia radiactiva de otra.

El isótopo del polonio $210P_0$ tiene una vida media de alrededor de 140 días; esto es, dada cualquier cantidad de esa sustancia, la mitad se desintegrará en 140 días.

Funciones Exponenciales

Aplicación: Desintegración radiactiva

Si inicialmente había 20 miligramos de $210P_0$, la tabla siguiente indica la cantidad restante después de varios intervalos de tiempo.

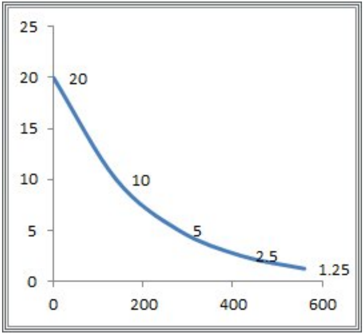
t(tiempo en días)	0	140	280	420	560
f(t)(mg restantes)	20	10	5	2.5	1.25

Ejercicio: Determine una función exponencial para modelar matemáticamente la situación anterior.

Funciones Exponenciales

Aplicación: Desintegración radiactiva

La gráfica siguiente muestra la naturaleza exponencial de la desintegración.



Funciones Exponenciales

Ejercicio: Decaimiento radiactivo Suponga que la función f mide la masa presente de carbono 14 (14C) (en gramos). Su vida media es $5,715$. La cantidad de carbono 14 presente después de t años está dada por $f(t) = 10(\frac{1}{2})^{\frac{t}{5,715}}$.

1. Determine la cantidad inicial.
2. Determine la cantidad presente luego de $2,000$ años.
3. Trace la gráfica de esta función en el intervalo desde $t = 0$ hasta $t = 10,000$.

Funciones Exponenciales

Aplicación: Fórmulas del interés compuesto

Suponga que se invierte una cantidad de dinero P, conocido como **principal**, a una tasa de interés anual r compuesta n veces en un año; el interés i por periodo es $i = \frac{r}{n}$. Después de t años, el monto de dinero acumulado A está dado por las fórmula siguientes:

1. Para n incrementos por año: $A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$

Funciones Exponenciales

Aplicación: Fórmulas del interés compuesto

Suponga que se invierte una cantidad de dinero P, conocido como **principal**, a una tasa de interés anual r compuesta n veces en un año; el interés i por periodo es $i = \frac{r}{n}$. Después de t años, el monto de dinero acumulado A está dado por las fórmula siguientes:

1. Para n incrementos por año: $A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$
2. Para interés compuesto continuo: $A = Pe^{rt}$

Funciones Exponenciales

Ejercicio: Interés compuesto Si se invierten $3,000$ dólares a una tasa de interés de $3.5\,\%$ por año, determine la cantidad de la inversión final de 5 años para los siguientes métodos de capitalización.

1. Anual
2. Semianual
3. Mensual
4. Semanal
5. Por día
6. Por hora
7. De manera continua.