Trigonometría: Funciones Trigonométricas de Números Reales

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo 2

Tabla de Contenido

Objetivos:

Discutiremos:

- la circunferencia unitaria

Objetivos:

Discutiremos:

- la circunferencia unitaria
- funciones trigonométricas de números reales

Objetivos:

Discutiremos:

- la circunferencia unitaria
- funciones trigonométricas de números reales
- dominios y rangos de las funciones trigonométricas de números reales

Objetivos:

Discutiremos:

- la circunferencia unitaria
- funciones trigonométricas de números reales
- dominios y rangos de las funciones trigonométricas de números reales
- identidades trigonométricas fundamentales

Objetivos:

Discutiremos:

- la circunferencia unitaria
- funciones trigonométricas de números reales
- dominios y rangos de las funciones trigonométricas de números reales
- identidades trigonométricas fundamentales
- otras identidades trigonométricas

Funciones Trigonométricas de Números Reales

Circunferencia Unitaria

Definición: La **circunferencia unitaria** es la circunferencia con centro en el origen del plano cartesiano y radio $r = 1$.

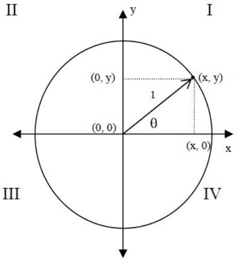


Figura: Ecuación de la circunferencia unitaria: $x^2+y^2 = 1$

Funciones Trigonométricas de Números Reales

Nota: Para definir las **funciones trigonométricas de números reales**, también llamadas **funciones circulares**, a cada número real t le asignaremos un punto $P(t) = (x, y)$ de la circunferencia unitaria. Dado $t \in \mathbb{R}$, recorremos t unidades sobre (a lo largo) de la circunferencia unitaria, comenzando en el punto (1, 0), en sentido contrario de las manecillas del reloj, si t es positivo. Si t es negativo, entonces nos movemos a favor de las manecillas del reloj. Usaremos las coordenadas del punto $P(t) = (x, y)$ para definir las funciones trigonométricas del número t.

Funciones Trigonométricas de Números Reales

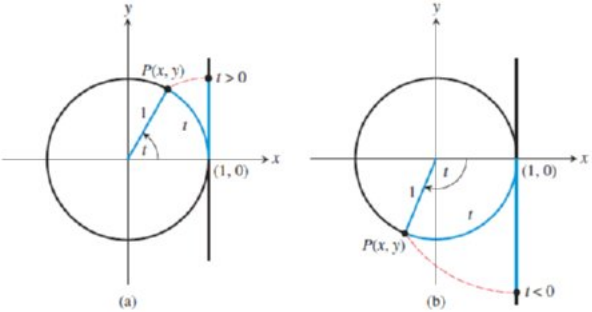


Figura: Movimiento a lo largo de la circunferencia unitaria

Funciones Trigonométricas de Números Reales

Funciones Trigonométricas de Números Reales

Definición: Sea t un número real y sea $P(x, y)$ el punto de la circunferencia unitaria correspondiente al número t. Si la función está definida, entonces

$\operatorname{sen}(t) = y$	$\csc(t) = \frac{1}{y}$
$\cos(t) = x$	$\sec(t) = \frac{1}{x}$
$\tan(t) = \frac{y}{x}$	$\cot(t) = \frac{x}{y}$

Funciones Trigonométricas de Números Reales

Funciones Trigonométricas de Números Reales

Definición: Sea t un número real y sea $P(x, y)$ el punto de la circunferencia unitaria correspondiente al número t. Si la función está definida, entonces

$\operatorname{sen}(t) = y$	$\csc(t) = \frac{1}{y}$
$\cos(t) = x$	$\sec(t) = \frac{1}{x}$
$\tan(t) = \frac{y}{x}$	$\cot(t) = \frac{x}{y}$

Nota: Si el punto correspondiente al número t está en uno de los ejes de coordenadas, entonces habrá dos funciones trigonométricas que no están definidas.

Funciones Trigonométricas de Números Reales

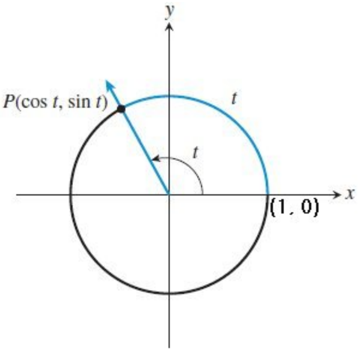


Figura: En el contexto de la circunferencia unitaria, los valores trigonométricos del número real t se definen en términos de las coordenadas x y y del punto P.

Funciones Trigonométricas de Números Reales

Dominios y Rangos de las Funciones Trigonométricas de Números Reales

Función	Dominio	Rango o Imagen
sen	$\mathbb{R}$	[-1, 1]
cos	$\mathbb{R}$	[-1, 1]
tan	$\mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n \text{ entero}\}$	$\mathbb{R}$
cot	$\mathbb{R}-\{n\pi,\ n \text{ entero}\}$	$\mathbb{R}$
sec	$\mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n \text{ entero}\}$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$
csc	$\mathbb{R}-\{n\pi,\ n \text{ entero}\}$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

Funciones Trigonométricas de Números Reales

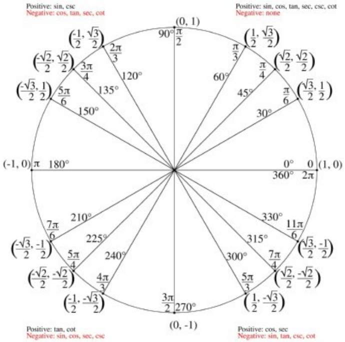


Figura: Relación entre los diferentes tipos de funciones trigonométricas

Funciones Trigonométricas de Números Reales

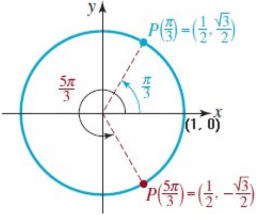
Nota: Las funciones trigonométricas del ángulo estandarizado θ con medida t en radianes, que estén definidas, corresponden a las mismas funciones trigonométricas definidas en términos del punto sobre la circunferencia unitaria determinado por el número real t.

Funciones Trigonométricas de Números Reales

Ejercicio: Calcule los valores trigonométricos de $t = \frac{5\pi}{3}$.

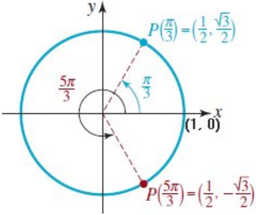
Funciones Trigonométricas de Números Reales

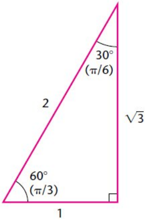
Ejercicio: Calcule los valores trigonométricos de $t = \frac{5\pi}{3}$.



Funciones Trigonométricas de Números Reales

Ejercicio: Calcule los valores trigonométricos de $t = \frac{5\pi}{3}$.



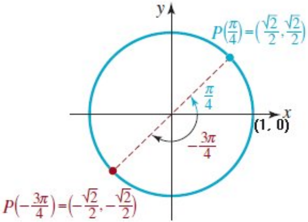


Funciones Trigonométricas de Números Reales

Ejercicio: Calcule los valores trigonométricos de $t = -\frac{3\pi}{4}$.

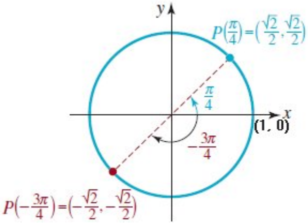
Funciones Trigonométricas de Números Reales

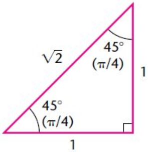
Ejercicio: Calcule los valores trigonométricos de $t = -\frac{3\pi}{4}$.



Funciones Trigonométricas de Números Reales

Ejercicio: Calcule los valores trigonométricos de $t = -\frac{3\pi}{4}$.





Funciones Trigonométricas de Números Reales

Ejercicio: Calcule las coordenadas exactas del punto $P(\frac{29\pi}{6})$ de la circunferencia unitaria.

Funciones Trigonométricas de Números Reales

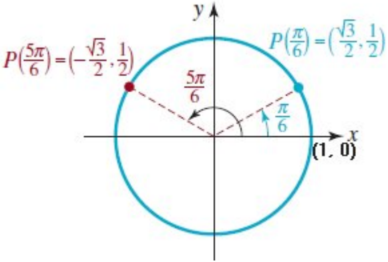
Ejercicio: Calcule las coordenadas exactas del punto $P(\frac{29\pi}{6})$ de la circunferencia unitaria.

$$\frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6} = 2(2\pi) + \frac{5\pi}{6}$$

Funciones Trigonométricas de Números Reales

Ejercicio: Calcule las coordenadas exactas del punto $P(\frac{29\pi}{6})$ de la circunferencia unitaria.

$$\frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6} = 2(2\pi) + \frac{5\pi}{6}$$



Funciones Trigonométricas de Números Reales

Ejercicio: En los ejercicios del 1 al 8, para el número real t dado **(a)** localice el punto $P(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$ en la circunferencia unitaria y **(b)** determine las coordenadas exactas del punto $P(t)$. No use la calculadora.

1. $\frac{7\pi}{6}$
2. $-\frac{4\pi}{3}$
3. $-\frac{\pi}{2}$
4. 2π
5. $\frac{5\pi}{3}$
6. $-\frac{3\pi}{2}$
7. $-\frac{11\pi}{6}$
8. $\frac{5\pi}{4}$

Funciones Trigonométricas de Números Reales

Ejercicio: En los ejercicios del 9 al 16, para el número real t dado **(a)** localice el punto $P(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ en la circunferencia unitaria y **(b)** use la calculadora para aproximar las coordenadas exactas del punto $P(t)$.

9. 1.3	10. -4.4	11. -7.2	12. 0.5
13. 6.1	14. 3.2	15. -2.6	16. 15.3

Funciones Trigonométricas de Números Reales

Ejercicio: En los ejercicios del 17 al 24 determine el valor exacto de cada función trigonométrica dada en el contexto de la circunferencia unitaria.

17. $\sin \frac{13\pi}{6}$	18. $\cos \frac{61\pi}{3}$	19. $\cos \frac{9\pi}{4}$	20. $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$
21. $\cos 9\pi$	22. $\sin 20\pi$	23. $\sin \frac{7\pi}{2}$	24. $\cos \frac{27\pi}{4}$

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales

Sea t un número real cualquiera. Si ambos lados de la ecuación están definidos, entonces:

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen}(t) = \frac{1}{\csc(t)} \quad \cos(t) = \frac{1}{\sec(t)} \quad \tan(t) = \frac{1}{\cot(t)}$$

$$\csc(t) = \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \quad \sec(t) = \frac{1}{\cos(t)} \quad \cot(t) = \frac{1}{\tan(t)}$$

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales

Sea t un número real cualquiera. Si ambos lados de la ecuación están definidos, entonces:

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen}(t) = \frac{1}{\csc(t)} \qquad \cos(t) = \frac{1}{\sec(t)} \qquad \tan(t) = \frac{1}{\cot(t)}$$

$$\csc(t) = \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \qquad \sec(t) = \frac{1}{\cos(t)} \qquad \cot(t) = \frac{1}{\tan(t)}$$

Identidades cociente

$$\tan(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)} \qquad \cot(t) = \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}$$

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales

Sea t un número real cualquiera. Si ambos lados de la ecuación están definidos, entonces:

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen}(t) = \frac{1}{\csc(t)} \qquad \cos(t) = \frac{1}{\sec(t)} \qquad \tan(t) = \frac{1}{\cot(t)}$$

$$\csc(t) = \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \qquad \sec(t) = \frac{1}{\cos(t)} \qquad \cot(t) = \frac{1}{\tan(t)}$$

Identidades cociente

$$\tan(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)} \qquad \cot(t) = \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}$$

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales (Continuación)

Identidades pitagóricas

$\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1 \quad 1 + \tan^2(t) = \sec^2(t)$

$\cot^2(t) + 1 = \csc^2(t)$

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales (Continuación)

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1 \quad 1 + \tan^2(t) = \sec^2(t)$$

$$\cot^2(t) + 1 = \csc^2(t)$$

Identidades Par/Impar

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen}(t) \quad \cos(-t) = \cos(t) \quad \tan(-t) = -\tan(t)$$

$$\csc(t) = -\csc(t) \quad \sec(-t) = \sec(t) \quad \cot(-t) = -\cot(t)$$

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales (Continuación)

Identidades pitagóricas

$\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1 \quad 1 + \tan^2(t) = \sec^2(t)$

$\cot^2(t) + 1 = \csc^2(t)$

Identidades Par/Impar

$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen}(t) \quad \cos(-t) = \cos(t) \quad \tan(-t) = -\tan(t)$

$\csc(t) = -\csc(t) \quad \sec(-t) = \sec(t) \quad \cot(-t) = -\cot(t)$

Nota: coseno y secante son funciones pares; las restantes son funciones impares.

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales (Continuación)

Identidades de Cofunciones

$$\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2}-t)=\cos(t) \quad \tan(\tfrac{\pi}{2}-t)=\cot(t) \quad \sec(\tfrac{\pi}{2}-t)=\csc(t)$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{2}-t)=\operatorname{sen}(t) \quad \cot(\tfrac{\pi}{2}-t)=\tan(t) \quad \csc(\tfrac{\pi}{2}-t)=\sec(t)$$

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales (Continuación)

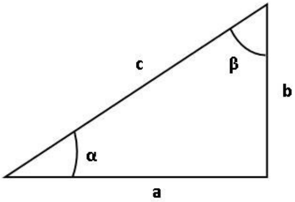
Identidades de Cofunciones

$$\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2} - t) = \cos(t) \quad \tan(\tfrac{\pi}{2} - t) = \cot(t) \quad \sec(\tfrac{\pi}{2} - t) = \csc(t)$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - t) = \operatorname{sen}(t) \quad \cot(\tfrac{\pi}{2} - t) = \tan(t) \quad \csc(\tfrac{\pi}{2} - t) = \sec(t)$$

Nota: En el ejercicio que sigue se le pide que demuestre las identidades de cofunciones .

Funciones Trigonométricas de Números Reales

Ejercicio: Identidades de Cofunciones En el triángulo rectángulo que se muestra, explique por qué $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$. Además, explique cómo se pueden obtener las seis identidades de cofunciones a partir de este triángulo para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



Funciones Trigonométricas de Números Reales

Ejercicio: Exprese cada una de las siguientes expresiones trigonométricas en términos de seno y coseno y luego simplifique:

1. $\tan(t)\,\mathrm{sen}(t) + \cos(t)$
2. $\mathrm{sen}(-u) + \cot(-u)\cos(-u)$
3. $\dfrac{\mathrm{sen}(x)}{\csc(x)} + \dfrac{\cos(x)}{\sec(x)}$
4. $\dfrac{\cot(t)}{\csc(t) - \mathrm{sen}(t)}$
5. $\dfrac{\cos^2(t) + 4 + \mathrm{sen}^2(t)}{5\sec^2(-t)}$

Identidades Trigonométricas

Muchas identidades provienen de las identidades fundamentales. Para comprobar que una ecuación trigonométrica es una identidad, transformamos un lado de la ecuación en el otro mediante una serie de pasos, cada uno de los cuales dá lugar a una identidad. **Sin embargo, no se puede efectuar las mismas operaciones en ambos lados de la igualdad.** Por ejemplo, si comenzamos con una ecuación que no es una identidad, como

$$\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

y elevamos cada lado al cuadrado, obtenemos la ecuación

$$\operatorname{sen}^2(x) = \operatorname{sen}^2(x)$$

la cual es una identidad.

Identidades Trigonométricas

Sugerencias para demostrar identidades trigonométricas

1. Comenzar con una lado de la ecuación y transformarlo en el otro lado. Generalmente, se recomienda comenzar con el lado más complicado.

Identidades Trigonométricas

Sugerencias para demostrar identidades trigonométricas

1. Comenzar con una lado de la ecuación y transformarlo en el otro lado. Generalmente, se recomienda comenzar con el lado más complicado.
2. Use álgebra e identidades que conozca para tranformar el lado con el que comenzó. Combine fracciones usando denominadores comunes, factorice y simplifique.

Identidades Trigonométricas

Sugerencias para demostrar identidades trigonométricas

1. Comenzar con una lado de la ecuación y transformarlo en el otro lado. Generalmente, se recomienda comenzar con el lado más complicado.
2. Use álgebra e identidades que conozca para tranformar el lado con el que comenzó. Combine fracciones usando denominadores comunes, factorice y simplifique.
3. Si llega a un punto de tranque, exprese todas las funciones en términos de senos y cosenos.

Identidades Trigonométricas

Sugerencias para demostrar identidades trigonométricas

1. Comenzar con una lado de la ecuación y transformarlo en el otro lado. Generalmente, se recomienda comenzar con el lado más complicado.
2. Use álgebra e identidades que conozca para tranformar el lado con el que comenzó. Combine fracciones usando denominadores comunes, factorice y simplifique.
3. Si llega a un punto de tranque, exprese todas las funciones en términos de senos y cosenos.
4. Siempre tenga en mente lo que desea obtener. Eso ayuda para decidir pasos posteriores.

Funciones Trigonométricas de Números Reales

Ejercicio: Demuestre las identidades trigonométricas siguientes.

1. $\dfrac{\cot(x)\sec(x)}{\csc(x)} = 1$
2. $\tan^2(x)(1+\cot^2(x)) = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2(x)}$
3. $\frac{\sec(x)+\csc(x)}{\tan(x)+\cot(x)} = \operatorname{sen}(x)+\cos(x)$
4. $\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)} - \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)} = 4\tan(x)\sec(x)$
5. $\frac{\cos(u)}{1-\operatorname{sen}(u)} = \sec(u)+\tan(u)$
6. $\frac{\sec(t)+\tan(t)}{\sec(t)-\tan(t)} = \frac{1+2\operatorname{sen}(t)+\operatorname{sen}^2(t)}{\cos^2(t)}$