Trigonometría: Ley de los Senos y Ley de los Cosenos

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo 2

Tabla de Contenido

Objetivos:

Discutiremos:

- Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Objetivos:

Discutiremos:

- Resolución de Triángulos Oblicuángulos
    - Ley de los Senos

Objetivos:

Discutiremos:

- Resolución de Triángulos Oblicuángulos
    - Ley de los Senos
    - Ley de los Cosenos

Objetivos:

Discutiremos:

- Resolución de Triángulos Oblicuángulos
  - Ley de los Senos
  - Ley de los Cosenos
- Fórmula Trigonométrica para Calcular el Área de un Triángulo

Objetivos:

Discutiremos:

- Resolución de Triángulos Oblicuángulos
  - Ley de los Senos
  - Ley de los Cosenos
- Fórmula Trigonométrica para Calcular el Área de un Triángulo
- Fórmula de Herón para Calcular el Área de un Triángulo

Objetivos:

Discutiremos:

- Resolución de Triángulos Oblicuángulos
  - Ley de los Senos
  - Ley de los Cosenos
- Fórmula Trigonométrica para Calcular el Área de un Triángulo
- Fórmula de Herón para Calcular el Área de un Triángulo
- Aplicaciones

Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Anteriormente resolvimos triángulos rectángulos haciendo uso de razones trigonométricas. Ahora resolveremos triángulos **ablicuángulos**; esto es, triángulos que no tienen ángulo recto alguno. Como herramientas, utilizaremos dos leyes: la **Ley de los Senos** y **Ley de los Cosenos**. Para resolver un triángulo, necesitamos algunos datos para comenzar ese proceso. Un triángulo está determinado por tres de sus seis partes, siempre que, al menos, una de ellas sea un lado. Por lo tanto, se tienen cinco posibilidades.

Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Casos Posibles

Caso 1: AAL o ALA. Se dan dos ángulos y un lado del triángulo. Este caso determina un triángulo único.

Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Casos Posibles

Caso 1: AAL o ALA. Se dan dos ángulos y un lado del triángulo. Este caso determina un triángulo único.

Caso 2: LLA. Se dan dos lados del triángulo y un ángulo opuesto a uno de esos lados. Este caso da lugar a tres posibilidades: no hay solución alguna, hay una solución única o hay dos posibles soluciones. A este caso se le conoce como el **caso ambiguo**.

Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Casos Posibles

Caso 3: LAL. Se dan dos lados del triángulo y el ángulo comprendido entre ellos. Este caso determina un triángulo único.

Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Casos Posibles

Caso 3: LAL. Se dan dos lados del triángulo y el ángulo comprendido entre ellos. Este caso determina un triángulo único.

Caso 4: LLL. Se dan los tres lados del triángulo. Este caso determina un triángulo único.

Resolución de Triángulos Oblicuángulos

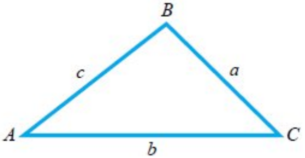
Casos Posibles

Caso 3: LAL. Se dan dos lados del triángulo y el ángulo comprendido entre ellos. Este caso determina un triángulo único.

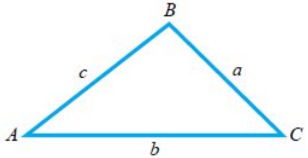
Caso 4: LLL. Se dan los tres lados del triángulo. Este caso determina un triángulo único.

Dependiendo de la información que se tenga a mano se comenzará la resolución del triángulo con la ley de los senos o la ley de los cosenos.

Resolución de Triángulos Oblicuángulos



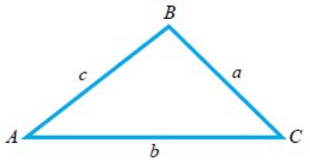
Resolución de Triángulos Oblicuángulos



Ley de los Senos

$$\frac{\operatorname{sen}(A)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(B)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(C)}{c}$$

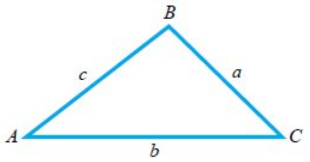
Resolución de Triángulos Oblicuángulos



Ley de los Senos

$$\frac{\operatorname{sen}(A)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(B)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(C)}{c} \text{ o } \frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$

Resolución de Triángulos Oblicuángulos



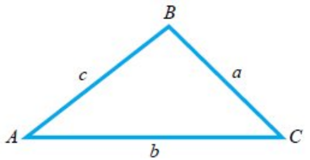
Ley de los Senos

$$\frac{\operatorname{sen}(A)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(B)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(C)}{c} \text{ o } \frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$

Ley de los Cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

Resolución de Triángulos Oblicuángulos



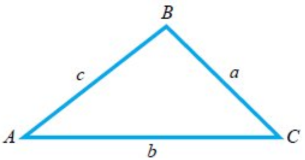
Ley de los Senos

$$\frac{\operatorname{sen}(A)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(B)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(C)}{c} \text{ o } \frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$

Ley de los Cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$$

Resolución de Triángulos Oblicuángulos



Ley de los Senos

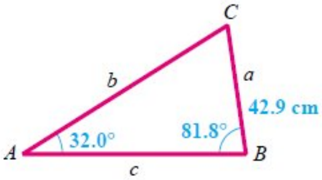
$$\frac{\operatorname{sen}(A)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(B)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(C)}{c} \text{ o } \frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$

Ley de los Cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Ejercicio: Resuelva el siguiente triángulo.



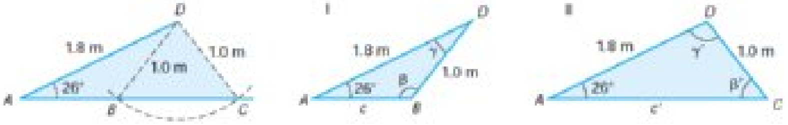
Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Ejercicio: Resuelva el siguiente triángulo: $\angle A = 26°$, $a = 1.0\,m,\;\; b = 1.8\,m$

Resolución de Triángulos Oblicuángulos

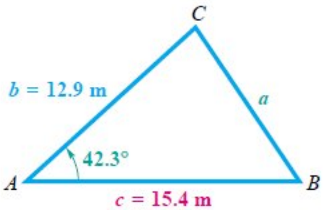
Ejercicio: Resuelva el siguiente triángulo: $\angle A = 26°$, $a = 1.0\,m,\ b = 1.8\,m$

Si tratamos de dibujar el triángulo, encontramos dos posibles triángulo: el I y el II.



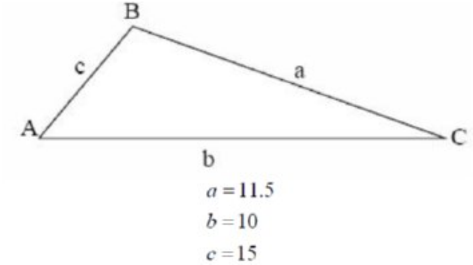
Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Ejercicio: Resuelva el siguiente triángulo:



Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Ejercicio: Resuelva el siguiente triángulo:

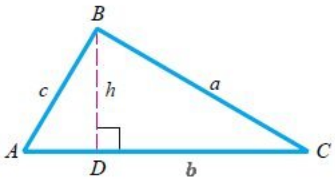


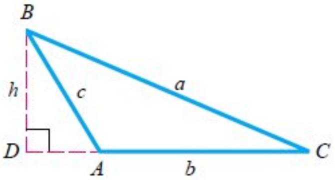
Fórmula Trigonométrica para Calcular el Área de un Triángulo

Fórmula trigonométrica para calcular el área de un triángulo

Para cualquier triángulo ABC, el área del triángulo está dada por cualquiera de las siguientes fórmulas:

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}(A);\ \acute{A}rea = \frac{1}{2}ac\,\mathrm{sen}(B);\ \ \acute{A}rea = \frac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}(C)$$





Fórmula de Herón

El matemático griego Herón de Alejandría desarrolló la siguiente fórmula para calcular el área de un triángulo siempre que se conozcan las longitudes de los tres lados a, b y c del tríangulo.

Fórmula de Herón

El matemático griego Herón de Alejandría desarrolló la siguiente fórmula para calcular el área de un triángulo siempre que se conozcan las longitudes de los tres lados a, b y c del tríangulo.

Fórmula de Herón para calcular el área de un triángulo

$$\textbf{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$s = \frac{a+b+c}{2}$ **(semiperímetro del triángulo)**

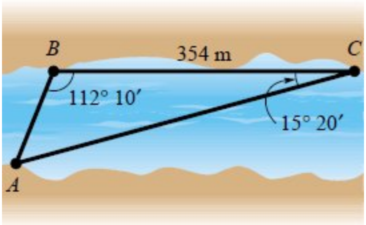
Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Ejercicio: Calcule el área del triángulo ABC si $\angle A = 24°40'$, $b = 23.7cm$ y $\angle C = 52°40'$. Haga uso de la fórmula:

1. trigonométrica de área.
2. de Herón.

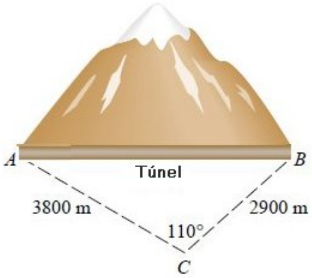
Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Ejercicio: Distancia a través de un río Para calcular la distancia AB a través de un río, se mide una distancia $BC = 354m$ en un lado del río. Se determinó que el $\angle B = 112°10'$ y el $\angle C = 15°20'$. Determine la distancia AB.(Vea la figura.)



Resolución de Triángulos Oblicuángulos

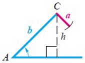
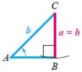
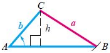
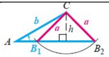
Ejercicio: Longitud de un túnel Para medir la distancia a través de una montaña para la construcción de un túnel, se escogió un punto C que se puede alcanzar desde ambos extremos del túnel. (Vea la figura.) Si la distancia $AC = 3800m$, $BC = 2900m$ y el $\angle C = 110°$, determine la longitud del túnel.



Apéndice

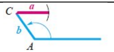
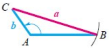
Ley de los Senos; Caso Ambiguo

Si el ángulo A es agudo, entonces hay cuatro posibles resultados.

Triángulos Posibles	Dibujo	Condiciones Necesarias
0		$\text{sen}(B) > 1; a < h < b$
1		$\text{sen}(B) = 1; a = h < b$
1		$0 < \text{sen}(B) < 1; a \geq b$
2		$0 < \text{sen}(B_2) < 1; a < h < b$

Ley de los Senos; Caso Ambiguo

Si el ángulo A es obtuso, entonces hay 2 posibles resultados.

Triángulos Posibles	Dibujo	Condiciones Necesarias
0		$\text{sen}(B) \geq 1; a \leq b$
1		$0 < \text{sen}(B) < 1; a > b$