Logaritmos y Funciones Logarítmicas

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo 2

Tabla de Contenido

Objetivos:

Discutiremos:

- la definición de logaritmos

Objetivos:

Discutiremos:

- la definición de logaritmos
- propiedades de los logaritmos

Objetivos:

Discutiremos:

- la definición de logaritmos
- propiedades de los logaritmos
- funciones logarítmicas

Objetivos:

Discutiremos:

- la definición de logaritmos
- propiedades de los logaritmos
- funciones logarítmicas
- leyes de los logaritmos

Objetivos:

Discutiremos:

- la definición de logaritmos
- propiedades de los logaritmos
- funciones logarítmicas
- leyes de los logaritmos
- fórmula de cambio de base de logaritmos

Objetivos:

Discutiremos:

- la definición de logaritmos
- propiedades de los logaritmos
- funciones logarítmicas
- leyes de los logaritmos
- fórmula de cambio de base de logaritmos

Logaritmos

Definición de Logaritmos

Definición: Sea a un número real, con $a > 0$, $a \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Si $a^y = x$, diremos que y **es el logaritmo de** x **en la base** a; se denota por $y = \log_a(x)$. Esto es,

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow \mathrm{a}^y = x$$

Logaritmos

Definición de Logaritmos

Definición: Sea a un número real, con $a > 0$, $a \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Si $a^y = x$, diremos que y **es el logaritmo de** x **en la base** a; se denota por $y = \log_a(x)$. Esto es,

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow \mathrm{a}^y = x$$

Nota: Observe que x tiene que ser un número real positivo. Esto es, los logaritmos no están definidos para números menores o iguales que 0.

Logaritmos

Ejemplos:

1. $2^3 = 8 \Leftrightarrow 3 = \log_2(8)$

Logaritmos

Ejemplos:

1. $2^3 = 8 \Leftrightarrow 3 = \log_2(8)$
2. $10^{-3} = 0.001 \Leftrightarrow -3 = \log_{10}(0.001) = \log(0.001)$

Logaritmos

Ejemplos:

1. $2^3 = 8 \Leftrightarrow 3 = \log_2(8)$
2. $10^{-3} = 0.001 \Leftrightarrow \text{-}3 = \log_{10}(0.001) = \log(0.001)$
3. $e^1 = e \Leftrightarrow 1 = \log_e(e) = \ln(e)$

Logaritmos

Ejemplos:

1. $2^3 = 8 \Leftrightarrow 3 = \log_2(8)$
2. $10^{-3} = 0.001 \Leftrightarrow -3 = \log_{10}(0.001) = \log(0.001)$
3. $e^1 = e \Leftrightarrow 1 = \log_e(e) = \ln(e)$
4. $\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 8^{\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \log_8(2)$

Propiedades de los Logaritmos

Propiedades de los logaritmos

1. $\log_a(1) = 0$

Propiedades de los Logaritmos

Propiedades de los logaritmos

1. $\log_a(1) = 0$ Razón: $a^0 = 1$

Propiedades de los Logaritmos

Propiedades de los logaritmos

1. $\log_a(1) = 0$ Razón: $a^0 = 1$
2. $\log_a(a) = 1$

Propiedades de los Logaritmos

Propiedades de los logaritmos

1. $\log_a(1) = 0$ Razón: $a^0 = 1$
2. $\log_a(a) = 1$ Razón: $a^1 = a$

Propiedades de los Logaritmos

Propiedades de los logaritmos

1. $\log_a(1) = 0$ Razón: $a^0 = 1$
2. $\log_a(a) = 1$ Razón: $a^1 = a$
3. $a^{\log_a(b)} = b$

Propiedades de los Logaritmos

Propiedades de los logaritmos

1. $\log_a(1) = 0$ Razón: $a^0 = 1$
2. $\log_a(a) = 1$ Razón: $a^1 = a$
3. $a^{\log_a(b)} = b$ Razón: $\log_a(b)$ es el exponente al cual hay que elevar a para obtener b; $b > 0$.

Propiedades de los Logaritmos

Ejercicios: Evalúe cada expresión siguiente:

1. $\log_9(81)$
2. $\log_{81}(9)$
3. $\log_8(0.25)$
4. $\log_4(\sqrt{2})$
5. $10^{\log(81)}$

Propiedades de los Logaritmos

Ejercicios: Determine el valor de x:

1. $\log_5(x) = 4$
2. $\log_3(243) = x$
3. $\log_x(6) = \frac{1}{2}$
4. $\log_x(3) = \frac{1}{3}$
5. $\log_x(8) = \frac{3}{2}$

Funciones Logarítmicas

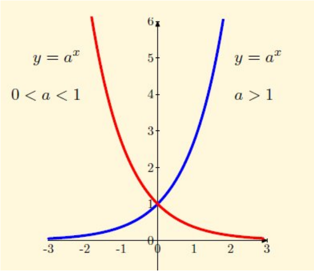

Figura: Función exponencial

La función exponencial $y = a^x$, con $a > 0$, $a \neq 1$, es una función biyectiva. Por lo tanto, tiene función inversa.

Funciones Logarítmicas

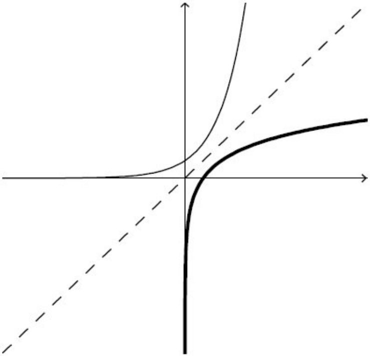

Figura: Gráfica de la función inversa de la función exponencial $(a > 1)$

Funciones Logarítmicas

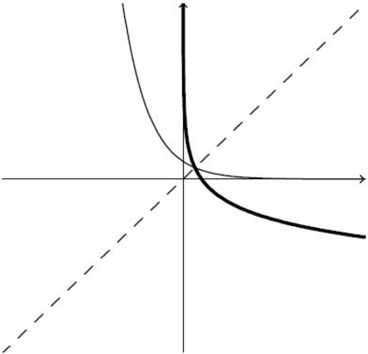

Figura: Gráfica de la función inversa de la función exponencial $(0 < a < 1)$

Funciones Logarítmicas

La función inversa de $y = a^x$ es $x = a^y$. Al despejar para y obtenemos $y = \log_a(x)$.

Funciones Logarítmicas

La función inversa de $y = a^x$ es $x = a^y$. Al despejar para y obtenemos $y = \log_a(x)$.

Función Logarítmica

Definición: Sea a un número real, con $a > 0$, $a \neq 1$. La **función logarítmica con base** a, denotada por $\log_a$, se define como

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow \mathrm{a}^y = x$$

Funciones Logarítmicas

La función inversa de $y = a^x$ es $x = a^y$. Al despejar para y obtenemos $y = \log_a(x)$.

Función Logarítmica

Definición: Sea a un número real, con $a > 0$, $a \neq 1$. La **función logarítmica con base** a, denotada por $\log_a$, se define como

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow \mathrm{a}^y = x$$

Funciones Logarítmicas

Notas:

1. El dominio de la función logarítmica $y = \log_a(x)$ es $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, que es la imagen o rango de la función exponencial $f(x) = a^x$.
2. El rango de la función logarítmica $y = \log_a(x)$ es $\mathbb{R}$, que es el dominio de la función exponencial $f(x) = a^x$.

Funciones Logarítmicas

Ejercicios: Determine la función inversa para cada una de las funciones f dadas a continuación. Además, indique el dominio y el rango o imagen de f y de f^{-1}. También indique la ecuación de cualquier asíntota vertical u horizontal de la gráfica de f y de f^{-1}.

1. $f(x) = 2^{x-3}$
2. $f(x) = 10^x - 3$
3. $f(x) = \log(x+3)$
4. $f(x) = \ln(2-x) + 5$

Leyes de los Logaritmos

Leyes de los logaritmos

Sea a un número real positivo con $a \neq 1$. Seab A, B y C números reales cualesquiera con $A > 0$, $B > 0$. Entonces:

Leyes de los Logaritmos

Leyes de los logaritmos

Sea a un número real positivo con $a \neq 1$. Seab A, B y C números reales cualesquiera con $A > 0$, $B > 0$. Entonces:

1. $\log_a(AB) = \log_a(A) + \log_a(B)$

Leyes de los Logaritmos

Leyes de los logaritmos

Sea a un número real positivo con $a \neq 1$. Seab A, B y C números reales cualesquiera con $A > 0$, $B > 0$. Entonces:

1. $\log_a(AB) = \log_a(A) + \log_a(B)$
2. $\log_a(\frac{A}{B}) = \log_a(A) - \log_a(B)$

Leyes de los Logaritmos

Leyes de los logaritmos

Sea a un número real positivo con $a \neq 1$. Seab A, B y C números reales cualesquiera con $A > 0$, $B > 0$. Entonces:

1. $\log_a(AB) = \log_a(A) + \log_a(B)$
2. $\log_a(\frac{A}{B}) = \log_a(A) - \log_a(B)$
3. $\log_a(A^C) = C \log_a(A)$

Leyes de los Logaritmos

Ejercicios: Exprese en términos de los logaritmos de x, y, x, w.

1. $\log(\frac{x^3 w}{y^2 z^4})$
2. $\log_a(\frac{\sqrt{y}}{x^4 \sqrt[3]{z}})$
3. $\ln(\sqrt[4]{\frac{x^7}{y^3 z}})$

Leyes de los Logaritmos

Ejercicios: Exprese en términos de solamente un logaritmo.

1. $\log_4(x) + \log_4(9y^2)$
2. $2\log_a(x) - \frac{1}{3}\log_a(x-2) - 5\log_a(2x+3)$
3. $5\log_a(x) + \frac{1}{2}\log_a(3x-4) - 3\log_a(5x+1)$

Leyes de los Logaritmos

Ejercicio: Verdadero o Falso Analice cada ecuación y determine si es verdadera para todos los valores posibles de las variables.

1. $\log(\frac{x}{y}) = \frac{log(x)}{log(y)}$
2. $\log_a(a^a) = a$
3. $\log_a(x - y) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(y)}$
4. $-\ln(\frac{1}{A}) = \ln(A)$
5. $(\log_2(P))^x = x\log_2(P)$
6. $(\log_a(P))(\log_a(Q)) = \log_a(P) + \log_a(Q)$

Fórmula de Cambio de Bases

Fórmula de Cambio de Base

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Fórmula de Cambio de Bases

Fórmula de Cambio de Base

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Ejemplos: Use la fórmula de cambio de base y logaritmos comunes o naturales para evaluar cada logaritmo, correcto a cinco lugares decimales.

1. $\log_5(8)$

Fórmula de Cambio de Bases

Fórmula de Cambio de Base

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Ejemplos: Use la fórmula de cambio de base y logaritmos comunes o naturales para evaluar cada logaritmo, correcto a cinco lugares decimales.

1. $\log_5(8)$
2. $\log_9(20)$

Fórmula de Cambio de Bases

Fórmula de Cambio de Base

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Ejemplos: Use la fórmula de cambio de base y logaritmos comunes o naturales para evaluar cada logaritmo, correcto a cinco lugares decimales.

1. $\log_5(8)$
2. $\log_9(20)$
3. $\log_{9.3}(12.5)$

Leyes de los Logaritmos

Ejercicios: Resuelva las siguientes ecuaciones.

1. $3^x = 21$
2. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
3. $5^{2x+1} = 6^{x-2}$
4. $\log_2(3) + \log_2(x) = \log_2(5) + \log_2(x-2)$
5. $\log(x) = 1 - \log(x-3)$
6. $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$

Aplicaciones

Ejercicio: Fechado con carbono La edad de un objeto antiguo se puede determinar por la cantidad de carbono 14 radiactivo que permanece en él. Si D_0 es la cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restante, entonces la edad A del objeto (en años) se determina por

$$A = -8267 \ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Determine la edad de un objeto si la cantidad D de carbono 14 que permanece en el objeto es 73 % de la cantidad original D_0.

Aplicaciones

Ejercicios:

- **Duplicar una inversión** ¿En cuanto tiempo se duplica una inversión de \$1,000 si la tasa de interés es de 8.5 % anual, capitalizable mensualmente?
- **Cultivo de bacterias** El número de bacterias en un cultivo se modela mediante la función $n(t) = 500e^{0.45t}$, donde t se mide en horas. ¿Después de cuántas horas la cantidad de bacterias llega a 10,000?

Leyes de los Logaritmos: Demostración

Leyes de los logaritmos:

Sea a un número real positivo con $a \neq 1$. Seab A, B y C números reales cualesquiera con $A > 0$, $B > 0$. Entonces:

Leyes de los Logaritmos: Demostración

Leyes de los logaritmos:

Sea a un número real positivo con $a \neq 1$. Seab A, B y C números reales cualesquiera con $A > 0$, $B > 0$. Entonces:

1. $\log_a(AB) = \log_a(A) + \log_a(B)$

Leyes de los Logaritmos: Demostración

Leyes de los logaritmos:

Sea a un número real positivo con $a \neq 1$. Seab A, B y C números reales cualesquiera con $A > 0$, $B > 0$. Entonces:

1. $\log_a(AB) = \log_a(A) + \log_a(B)$
2. $\log_a(\frac{A}{B}) = \log_a(A) - \log_a(B)$

Leyes de los Logaritmos: Demostración

Leyes de los logaritmos:

Sea a un número real positivo con $a \neq 1$. Seab A, B y C números reales cualesquiera con $A > 0$, $B > 0$. Entonces:

1. $\log_a(AB) = \log_a(A) + \log_a(B)$
2. $\log_a(\frac{A}{B}) = \log_a(A) - \log_a(B)$
3. $\log_a(A^C) = C\log_a(A)$

Leyes de los Logaritmos: Demostración

Leyes de los logaritmos:

Sea a un número real positivo con $a \neq 1$. Seab A, B y C números reales cualesquiera con $A > 0$, $B > 0$. Entonces:

1. $\log_a(AB) = \log_a(A) + \log_a(B)$
2. $\log_a(\frac{A}{B}) = \log_a(A) - \log_a(B)$
3. $\log_a(A^C) = C\log_a(A)$

Demostración: Sea $\log_a(A) = u$ y $\log_a(B) = v$. Por lo tanto, $A = a^u$ y $B = a^v$.

- $\log_a(AB) = \log_a(a^u a^v) = \log_a(a^{u+v})$
  $= u + v = \log_a(A) + \log_a(B)$

Leyes de los Logaritmos: Demostración

Demostración: Continuación

- $\log_a(\frac{A}{B}) = \log_a(\frac{a^u}{a^v})$
  $= \log_a(a^{u-v}) = u - v = \log_a(A) - \log_a(B)$
- $\log_a(A^C) = \log_a((a^u)^C) = \log_a(a^{uC})$
  $= uC = C\log_a(A)$

Fórmula de Cambio de Bases: Demostración

Fórmula de Cambio de Base

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Fórmula de Cambio de Bases: Demostración

Fórmula de Cambio de Base

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Demostración: Sea $y = \log_b(x)$. Por lo tanto, $b^y = x$.
Aplicando $\log_a$ en ambos lados, obtenemos
$\log_a(b^y) = \log_a(x)$
$y \times \log_a(b) = \log_a(x)$
$y = \frac{log_a(x)}{\log_a(b)}$

Ejercicios Sugeridos para Práctica

Págs: 241 a la 243: Ejercicios: 1 al 6 (todos), 45 al 84 (impares), 87, 101 al 106 (todos), 109, 111

Págs: 241 a la 243: Ejercicios: 1 al 4 (todos), 5, 9, 11, 15, 17, 25, 27, 32, 39, 55, 59, 63, 69, 71, 75, 79, 95, 101, 103, 109, 111119, 134, 135