

Modelos Exponenciales y Logarítmicos

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo 2

Tabla de Contenido

- Objetivos
- Modelos Matemáticos
- Crecimiento Exponencial
- Decaimiento Exponencial
- Crecimiento Logístico
- Modelos Logarítmicos

Objetivos:

Discutiremos:

- cuatro tipos de modelos matemáticos basados en funciones exponenciales o en funciones logarítmicas

Objetivos:

Discutiremos:

- cuatro tipos de modelos matemáticos basados en funciones exponenciales o en funciones logarítmicas
 - 1 modelo de crecimiento exponencial ilimitado

Objetivos:

Discutiremos:

- cuatro tipos de modelos matemáticos basados en funciones exponenciales o en funciones logarítmicas
 - 1 modelo de crecimiento exponencial ilimitado
 - 2 modelo de decaimiento exponencial

Objetivos:

Discutiremos:

- cuatro tipos de modelos matemáticos basados en funciones exponenciales o en funciones logarítmicas
 - 1 modelo de crecimiento exponencial ilimitado
 - 2 modelo de decaimiento exponencial
 - 3 modelo de crecimiento logístico

Objetivos:

Discutiremos:

- cuatro tipos de modelos matemáticos basados en funciones exponenciales o en funciones logarítmicas
 - 1 modelo de crecimiento exponencial ilimitado
 - 2 modelo de decaimiento exponencial
 - 3 modelo de crecimiento logístico
 - 4 modelos logarítmicos

Objetivos:

Discutiremos:

- cuatro tipos de modelos matemáticos basados en funciones exponenciales o en funciones logarítmicas
 - 1 modelo de crecimiento exponencial ilimitado
 - 2 modelo de decaimiento exponencial
 - 3 modelo de crecimiento logístico
 - 4 modelos logarítmicos

Modelos Matemáticos

Modelos Matemáticos Exponenciales y Logarítmicos

Crecimiento Exponencial Ilimitado: $A = A_0 e^{kt}$, $k > 0$

Decaimiento Exponencial: $A = A_0 e^{-kt}$, $k > 0$

Crecimiento Logístico: $A = \frac{M}{1+ce^{-kt}}$, $c, k, M > 0$

Logarítmicos: $y = a + b \ln(x)$, $y = a + b \log(x)$

Crecimiento Exponencial

Ejercicio: Modelado del crecimiento de la población Si la población mundial actualmente sigue un modelo de crecimiento de la forma $A = A_0 e^{kt}$, ¿cuántos años, al año más cercano, tardará la población mundial en duplicarse, si crece continuamente a una tasa anual de 1.14%?

Crecimiento Exponencial

Ejercicio: Modelado del crecimiento de la población En cierto experimento de investigación, una población de un tipo particular de insectos se incrementó de acuerdo a la ley de crecimiento exponencial ilimitado. Después de 2 días había 100 insectos y después de 4 días había 300. Aproxime cuántos insectos había luego de 5 días.

Decaimiento Exponencial

FECHADO CON CARBONO 14 Si 90% de una muestra de carbono 14 permanece después 866 años, ¿cuál es la vida media del carbono 14?

Decaimiento Exponencial

FECHADO CON CARBONO 14 En 1998 varios investigadores examinaron el sudario de Turín y encontraron fibras vegetales en el tejido que tenían 92.1% de la cantidad de carbono 14 de una muestra viva. Si esto fue exacto, ¿cuándo se fabricó el tejido?

Crecimiento Logístico

Algunas poblaciones, al inicio, tienen un crecimiento rápido, seguido de un crecimiento donde su razón de cambio va declinando, como se ilustra en la figura a continuación:

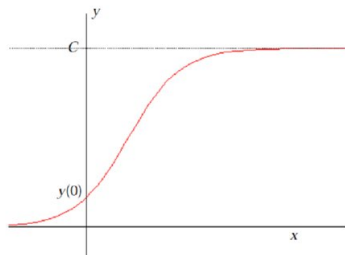


Figura: Curva de Crecimiento Logístico

Crecimiento Logístico

Un modelo que describe este tipo de patrón de crecimiento es la **curva logística**, dada por la función

$$A = \frac{M}{1+ce^{-kt}},$$

donde A es el tamaño de la población y t es el tiempo. Una curva de crecimiento logístico también se conoce como **curva sigmoide**.

Crecimiento Logístico

Ejercicio: Propagación de un virus En el *campus* de una universidad de 5,000 estudiantes, un alumno regresa de vacaciones con un virus de influenza contagioso y de larga duración. La propagación del virus se modela por

$$y = \frac{5,000}{1+4,999e^{-0.08t}}, t \geq 0,$$

donde y es el número de estudiantes infectados después de t días. La universidad cancela las clases cuando el 40%, o más, de los alumnos están infectados.

- ¿Cuántos estudiantes están infectados después de 5 días?
- ¿Después de cuántos días se cancelarán las clases en la universidad?

Modelos Logarítmicos

Magnitud de Terremotos En la escala Richter, la magnitud M de un terremoto está dada por

$$M = \frac{2}{3} \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

donde E es la energía liberada por el terremoto, medida en julios, y E_0 es la energía liberada por un terremoto de referencia muy pequeño, la cual se ha estandarizado como $E_0 = 10^{4.40}$ julios.

Modelos Logarítmicos

Magnitud de Terremotos En la escala Richter, la magnitud M de un terremoto está dada por

$$M = \frac{2}{3} \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

donde E es la energía liberada por el terremoto, medida en julios, y E_0 es la energía liberada por un terremoto de referencia muy pequeño, la cual se ha estandarizado como $E_0 = 10^{4.40}$ julios.

Modelos Logarítmicos

Ejercicio: Intensidad de un terremoto El terremoto de 1906 en San Francisco liberó aproximadamente 5.96×10^{16} julios de energía. Otro terremoto golpeó el área de la bahía justo antes del tercer juego de la Serie Mundial de 1989, liberando 1.12×10^{15} julios de energía.

Modelos Logarítmicos

Ejercicio: Intensidad de un terremoto El terremoto de 1906 en San Francisco liberó aproximadamente 5.96×10^{16} julios de energía. Otro terremoto golpeó el área de la bahía justo antes del tercer juego de la Serie Mundial de 1989, liberando 1.12×10^{15} julios de energía.

- 1 Determine la magnitud de cada terremoto en la escala Richter. Redondee cada respuesta a dos lugares decimales.

Modelos Logarítmicos

Ejercicio: Intensidad de un terremoto El terremoto de 1906 en San Francisco liberó aproximadamente 5.96×10^{16} julios de energía. Otro terremoto golpeó el área de la bahía justo antes del tercer juego de la Serie Mundial de 1989, liberando 1.12×10^{15} julios de energía.

- 1 Determine la magnitud de cada terremoto en la escala Richter. Redondee cada respuesta a dos lugares decimales.
- 2 ¿Cuántas veces liberó más energía el terremoto de 1906 que el de 1989?

Modelos Logarítmicos

Ejercicio: Terremotos Generalmente un terremoto requiere una magnitud superior a 5.6 en la escala Richter para infligir daños graves. ¿Cuántas veces más poderoso que un terremoto de magnitud 5.6 fue el terremoto de Colombia en 1906, que registró una magnitud de 8.6 en la escala de Richter?

Modelos Logarítmos

pH de una sustancia química La concentración de iones de hidrógeno es una sustancia está relacionada con su acidez y basicidad. Debido a que las cantidades de iones de hidrógeno varían en un rango muy amplio, se usan logaritmos para crear una **escala de pH** la cual se define como sigue:

$$\text{pH} = -\log([H^+])$$

Modelos Logarítmicos

pH de una sustancia química La concentración de iones de hidrógeno es una sustancia está relacionada con su acidez y basicidad. Debido a que las cantidades de iones de hidrógeno varían en un rango muy amplio, se usan logaritmos para crear una **escala de pH** la cual se define como sigue:

$$\text{pH} = -\log([H^+])$$

donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno, en moles por litro.

Modelos Logarítmicos

pH de una sustancia química La concentración de iones de hidrógeno es una sustancia está relacionada con su acidez y basicidad. Debido a que las cantidades de iones de hidrógeno varían en un rango muy amplio, se usan logaritmos para crear una **escala de pH** la cual se define como sigue:

$$\text{pH} = -\log([H^+])$$

donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno, en moles por litro.

El agua pura tiene un pH de 7, lo cual significa que es neutra. Las sustancias con un pH menor que 7 son ácidas y las que tienen un pH mayor que 7 son básicas.

Modelos Logarítmicos

Ejercicio: Química Calcule el pH de cada sustancia química, dada la concentraciones de iones de hidrógeno $[H^+]$ indicada. Use el modelo matemático

$$\text{pH} = -\log([H^+])$$

Modelos Logarítmicos

Ejercicio: Química Calcule el pH de cada sustancia química, dada la concentraciones de iones de hidrógeno $[H^+]$ indicada. Use el modelo matemático

$$\text{pH} = -\log([H^+])$$

- 1 Vinagre: $[H^+] = 9.32 \times 10^{-4}$

Modelos Logarítmos

Ejercicio: Química Calcule el pH de cada sustancia química, dada la concentraciones de iones de hidrógeno $[H^+]$ indicada. Use el modelo matemático

$$\text{pH} = -\log([H^+])$$

- 1 Vinagre: $[H^+] = 9.32 \times 10^{-4}$
- 2 Agua de mar: $[H^+] = 4.63 \times 10^{-9}$

Modelos Logarítmicos

Ejercicio: Química Si el pH de una muestra de agua de lluvia es 5.2, ¿Cuál es su concentración de iones de hidrógeno en moles por litro. Calcule su respuesta a dos dígitos significativos.