

# Sucesiones Geométricas

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo 2

# Tabla de Contenido

- Objetivos

## 1 Sucesiones Geométricas

- Definición
- Sumas Parciales de Sucesiones Geométricas
- Series Geométricas

# Objetivos:

Discutiremos:

- definición de sucesión o progresión geométrica

# Objetivos:

Discutiremos:

- definición de sucesión o progresión geométrica
- sumas parciales de sucesiones geométricas

# Objetivos:

Discutiremos:

- definición de sucesión o progresión geométrica
- sumas parciales de sucesiones geométricas
- series geométricas

# Objetivos:

Discutiremos:

- definición de sucesión o progresión geométrica
- sumas parciales de sucesiones geométricas
- series geométricas
- ejercicios y aplicaciones

# Sucesiones Geométricas

## Sucesión Geométricas:

**Definición:** Una sucesión o progresión geométrica es una sucesión de la forma

$$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, a_1r^4, \dots, r \neq 0$$

# Sucesiones Geométricas

## Sucesión Geométricas:

**Definición:** Una **sucesión o progresión geométrica** es una sucesión de la forma

$$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, a_1r^4, \dots, r \neq 0$$

El número  $a_1$  es el **primer término** y  $r$  es la **razón común** o **razón constante** de la sucesión.



# Sucesiones Geométricas

## Sucesión Geométricas:

**Definición:** Una **sucesión o progresión geométrica** es una sucesión de la forma

$$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, a_1r^4, \dots, r \neq 0$$

El número  $a_1$  es el **primer término** y  $r$  es la **razón común** o **razón constante** de la sucesión. El **n-ésimo término** está dado por

$$a_n = a_1r^{n-1}$$

# Sucesiones Geométricas

## Sucesión Geométricas:

**Definición:** Una **sucesión o progresión geométrica** es una sucesión de la forma

$$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, a_1r^4, \dots, r \neq 0$$

El número  $a_1$  es el **primer término** y  $r$  es la **razón común** o **razón constante** de la sucesión. El **n-ésimo término** está dado por

$$a_n = a_1r^{n-1}$$

# Sucesiones Geométricas

## Ejemplos:

- ① Si  $a_1 = 3$  y  $2 = 2$ , entonces se tiene la sucesión aritmética  
 $3, 3 \times 2, 3 \times 4, 3 \times 8, \dots$ , o bien,  
 $3, 6, 12, 24, \dots$

# Sucesiones Geométricas

## Ejemplos:

- ① Si  $a_1 = 3$  y  $2 = 2$ , entonces se tiene la sucesión aritmética  
 $3, 3 \times 2, 3 \times 4, 3 \times 8, \dots$ , o bien,  
 $3, 6, 12, 24, \dots$

La razón entre cualquiera dos términos de esta sucesión es  $r = 2$ . El  $n$ -ésimo término es  $a_n = 3 \times 2^{n-1}$ .

# Sucesiones Geométricas

## Ejemplos:

- ① Si  $a_1 = 3$  y  $2 = 2$ , entonces se tiene la sucesión aritmética  
 $3, 3 \times 2, 3 \times 4, 3 \times 8, \dots$ , o bien,  
 $3, 6, 12, 24, \dots$

La razón entre cualquiera dos términos de esta sucesión es  $r = 2$ . El  $n$ -ésimo término es  $a_n = 3 \times 2^{n-1}$ .

- ② Considere la sucesión geométrica

$$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$$

# Sucesiones Geométricas

## Ejemplos:

- ① Si  $a_1 = 3$  y  $2 = 2$ , entonces se tiene la sucesión aritmética
- $$3, 3 \times 2, 3 \times 4, 3 \times 8, \dots, \text{ o bien,}$$
- $$3, 6, 12, 24, \dots$$

La razón entre cualquiera dos términos de esta sucesión es  $r = 2$ . El  $n$ -ésimo término es  $a_n = 3 \times 2^{n-1}$ .

- ② Considere la sucesión geométrica

$$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$$

En este caso la razón común es  $r = \frac{1}{2}$ . El  $n$ -ésimo término es  $a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

# Sucesiones Geométricas

## Ejercicios:

- 1 Determine el décimo término de la progresión geométrica 4,8,16,... .
- 2 En una progresión geométrica  $a_6 = 1458$  y  $r = 3$ . Determine  $a_1$  y  $a_4$ .
- 3 ¿Qué termino de la sucesión geométrica 2, 6, 18, ... es 118098?
- 4 El tercer término de una sucesión geométrica es 10 y el sexto es 80. Determine su razón común.
- 5 En una progresión geométrica  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  se tiene:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 7$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = 56$$

Determine  $a_1 + a_4$  .

# Sumas Parciales de Sucesiones Geométricas

Si queremos sumar los primeros  $n$  términos de una sucesión geométrica escribimos la suma  $S_n$  y después multiplicamos por la razón común.

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1}.$$

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + \dots + a_1r^{n-1} + a_1r^n.$$



# Sumas Parciales de Sucesiones Geométricas

Si queremos sumar los primeros  $n$  términos de una sucesión geométrica escribimos la suma  $S_n$  y después multiplicamos por la razón común.

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1}.$$

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + \dots + a_1r^{n-1} + a_1r^n.$$

Ahora, hallamos la diferencia  $S_n - rS_n$ .

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n$$

# Sumas Parciales de Sucesiones Geométricas

Si queremos sumar los primeros  $n$  términos de una sucesión geométrica escribimos la suma  $S_n$  y después multiplicamos por la razón común.

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1}.$$

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + \dots + a_1r^{n-1} + a_1r^n.$$

Ahora, hallamos la diferencia  $S_n - rS_n$ .

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n$$

$$S_n(1 - r) = a_1(1 - r^n)$$

# Sumas Parciales de Sucesiones Geométricas

Si queremos sumar los primeros  $n$  términos de una sucesión geométrica escribimos la suma  $S_n$  y después multiplicamos por la razón común.

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1}.$$

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + \dots + a_1r^{n-1} + a_1r^n.$$

Ahora, hallamos la diferencia  $S_n - rS_n$ .

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n$$

$$S_n(1 - r) = a_1(1 - r^n)$$

Por lo tanto

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, \text{ siempre que } r \neq 1$$

# Sumas Parciales de Sucesiones Geométricas

## Sumas Parciales de una Sucesión Geométrica ( $r \neq 1$ ):

En el caso de la sucesión geométrica  $a_n = a_1 r^{n-1}$  está dada por:

# Sumas Parciales de Sucesiones Geométricas

## Sumas Parciales de una Sucesión Geométrica ( $r \neq 1$ ):

En el caso de la sucesión geométrica  $a_n = a_1 r^{n-1}$  está dada por:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$$

# Sumas Parciales de Sucesiones Geométricas

## Sumas Parciales de una Sucesión Geométrica ( $r \neq 1$ ):

En el caso de la sucesión geométrica  $a_n = a_1 r^{n-1}$  está dada por:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$$

### Notas:

- 1 La fórmula anterior también se puede expresar de la forma

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

- 2 Si  $r = 1$ , entonces  $S_n = na_1$ .

# Sucesiones Geométricas

## Ejercicios Sumas Parciales:

- 1 Calcule la suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica en la que  $a_1 = 4$  y  $r = 3$ .
- 2 Calcule la suma  $\sum_{i=0}^{10} 3\left(\frac{1}{2}\right)^k$ .
- 3 Se hace un depósito de \$50 el primer día de cada mes en una cuenta de ahorros que paga 6% de interés compuesto mensualmente. ¿Cuál es el monto al término de 2 años? (**Nota:** Este tipo de plan de ahorros se denomina **anualidad creciente.**)

# Series Geométricas

**Definición:** La suma de los términos de una sucesión geométrica infinita se denomina **serie geométrica infinita** o, simplemente, **serie geométrica**.

**Nota:** La fórmula para la  $n - \text{ésima}$  suma parcial,  $S_n$  de una sucesión geométrica finita, dependiendo del valor de  $r$ , se puede generalizar para obtener una fórmula para la **suma**  $S$  de una serie geométrica infinita. Específicamente, si la razón común  $r$  tiene la propiedad  $|r| < 1$  se puede demostrar que  $r^n$  tiende a cero si  $n$  aumenta sin límite. Como consecuencia,

$$a_1 \left( \frac{1-r^n}{1-r} \right) \longrightarrow a_1 \left( \frac{1-0}{1-r} \right), \text{ si } n \longrightarrow +\infty$$



# Series Geométricas

## Suma de una Serie Geométrica infinita:

Si  $|r| < 1$ , la serie geométrica infinita

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots$$

tiene por **suma**

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} a_1r^i = \frac{a_1}{1-r}$$

**Nota:** Si  $|r| \geq 1$ , la serie no tiene suma.

# Series Geométricas

**Ejercicios:** Determine cada suma:

①  $\sum_{n=0}^{\infty} 4(0.6)^{n-1}$

②  $3 + 0.3 + 0.03 + 0.003 + \dots$

③  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$