Sucesiones Infinitas y Notación de Sumatoria

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo 2

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido

Objetivos:

Discutiremos:

- definición de sucesión infinita

Objetivos:

Discutiremos:

- definición de sucesión infinita
- notación factorial

Objetivos:

Discutireмos:

- definición de sucesión infinita
- notación factorial
- sucesión recursiva

Objetivos:

Discutiremos:

- definición de sucesión infinita
- notación factorial
- sucesión recursiva
- sumas parciales de sucesiones

Objetivos:

Discutiremos:

- definición de sucesión infinita
- notación factorial
- sucesión recursiva
- sumas parciales de sucesiones
- notación de sumatoria

Objetivos:

Discutiremos:

- definición de sucesión infinita
- notación factorial
- sucesión recursiva
- sumas parciales de sucesiones
- notación de sumatoria
- ejercicios y aplicaciones

Sucesiones Infinitas

Definición 1:

Definición 1: Una **sucesión infinita** es un listado ilimitado de números, en nuestro caso números reales, considerados en un orden específico.

Sucesiones Infinitas

Definición 1:

Definición 1: Una **sucesión infinita** es un listado ilimitado de números, en nuestro caso números reales, considerados en un orden específico.

Ejemplo: $5, 10, 15, \ldots$ (Suponga que el patrón continúa.)

Sucesiones Infinitas

Definición 1:

Definición 1: Una **sucesión infinita** es un listado ilimitado de números, en nuestro caso números reales, considerados en un orden específico.

Ejemplo: $5, 10, 15, \ldots$ (Suponga que el patrón continúa.)

Definición 2:

Definición 2: Una **sucesión infinita** es una función f cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Los valores $f(1), f(2), f(3), \ldots$ son los **términos** de la sucesión. ...

Sucesiones Infinitas

Definición 1:

Definición 1: Una **sucesión infinita** es un listado ilimitado de números, en nuestro caso números reales, considerados en un orden específico.

Ejemplo: 5, 10, 15, … (Suponga que el patrón continúa.)

Definición 2:

Definición 2: Una **sucesión infinita** es una función f cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Los valores $f(1), f(2), f(3), \ldots$ son los **términos** de la sucesión. …

Ejemplo: $f(n) = 5n$

Sucesiones Infinitas

Notación:

Se denota por $\mathrm{a}_1, a_2, a_3, \ldots$.

Sucesiones Infinitas

Notación:

Se denota por $\mathrm{a}_1, a_2, a_3, \ldots$.

a_1 – **primer término de la sucesión**

Sucesiones Infinitas

Notación:

Se denota por $\mathrm{a}_1, a_2, a_3, \ldots$.

a_1 – **primer término de la sucesión**

a_2 – **segundo término de la sucesión**

Sucesiones Infinitas

Notación:

Se denota por $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

a_1 – **primer término de la sucesión**

a_2 – **segundo término de la sucesión**

$\ldots$

Sucesiones Infinitas

Notación:

Se denota por $\mathrm{a}_1, a_2, a_3, \ldots$.

a_1 – **primer término de la sucesión**

a_2 – **segundo término de la sucesión**

$\ldots$

a_n – n**-ésimo término de la sucesión**

Sucesiones Infinitas

Ejemplos:

Sucesiones Infinitas

Ejemplos:

1. Sucesión de los números impares positivos: 1, 3, 5, 7, 9,...

Sucesiones Infinitas

Ejemplos:

1. Sucesión de los números impares positivos: 1, 3, 5, 7, 9,. . .
2. Sucesión de los múltiplos positivos de 5: 5, 10, 15, 20,. . .

Sucesiones Infinitas

Ejemplos:

1. Sucesión de los números impares positivos: 1, 3, 5, 7, 9,...
2. Sucesión de los múltiplos positivos de 5: 5, 10, 15, 20,...
3. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

Sucesiones Infinitas

Ejemplos:

1. Sucesión de los números impares positivos: 1, 3, 5, 7, 9,...
2. Sucesión de los múltiplos positivos de 5: 5, 10, 15, 20,...
3. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$
4. $c_n = 3 + (-1)^n$

Sucesiones Infinitas

Ejemplos:

1. Sucesión de los números impares positivos: 1, 3, 5, 7, 9,...
2. Sucesión de los múltiplos positivos de 5: 5, 10, 15, 20,...
3. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$
4. $c_n = 3 + (-1)^n$
5. $t_n = 0.9999$

Sucesiones Infinitas

Ejemplos:

1. Sucesión de los números impares positivos: 1, 3, 5, 7, 9,...
2. Sucesión de los múltiplos positivos de 5: 5, 10, 15, 20,...
3. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$
4. $c_n = 3 + (-1)^n$
5. $t_n = 0.9999$
6. $b_n = \frac{2n}{1+n}$

Sucesiones Infinitas

Ejemplos:

1. Sucesión de los números impares positivos: 1, 3, 5, 7, 9,. . .
2. Sucesión de los múltiplos positivos de 5: 5, 10, 15, 20,. . .
3. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$
4. $c_n = 3 + (-1)^n$
5. $t_n = 0.9999$
6. $b_n = \frac{2n}{1+n}$
7. $a_n = (-1)^n$

Sucesiones Infinitas

Ejemplos:

1. Sucesión de los números impares positivos: 1, 3, 5, 7, 9,...
2. Sucesión de los múltiplos positivos de 5: 5, 10, 15, 20,...
3. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$
4. $c_n = 3 + (-1)^n$
5. $t_n = 0.9999$
6. $b_n = \frac{2n}{1+n}$
7. $a_n = (-1)^n$
8. $c_n = \frac{n^2}{n+1}$

Sucesiones Infinitas

Ejemplos:

1. Sucesión de los números impares positivos: 1, 3, 5, 7, 9,...
2. Sucesión de los múltiplos positivos de 5: 5, 10, 15, 20,...
3. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$
4. $c_n = 3 + (-1)^n$
5. $t_n = 0.9999$
6. $b_n = \frac{2n}{1+n}$
7. $a_n = (-1)^n$
8. $c_n = \frac{n^2}{n+1}$
9. Sucesión de los dígitos del número π

Sucesiones Infinitas

Ejercicio: Suponga que el patrón continúa y escriba una fórmula para definir el término n-ésimo de las sucesiones siguientes:

1. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots$
2. $-2, 4, -8, 16, -32, \ldots$
3. $5, -25, 125, -625, ...$
4. $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, ..$
5. $1, 4, 7, 10, ...$

Sucesiones Infinitas

Algunas sucesiones importantes en matemáticas incluyen términos que se definen con tipos especiales de productos denominados **factoriales**.

Notación Factorial

Definición de Factorial: Si n es un número entero positivo, entonces n **factorial** se define como sigue:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 ... \times n, n \geq 2.$$

Casos especiales:

1. $0! = 1$
2. $1! = 1$

Sucesiones Infinitas

Ejercicio 1: Evalúe cada expresión factorial.

1. $\frac{8!}{2! \times 6!}$
2. $\frac{2! \times 6!}{3! \times 5!}$
3. $\frac{n!}{(n-1)!}$

Ejercicio 2: Escriba los primeros cinco términos de la sucesión dada.

1. $a_n = \frac{2^n}{n!}$

Sucesiones Recursivas

Definición:

Definición: Una sucesión se define de forma **recursiva** cuando el n-ésimo término depende de algunos o todos los términos anteriores.

Sucesiones Recursivas

Definición:

Definición: Una sucesión se define de forma **recursiva** cuando el n-ésimo término depende de algunos o todos los términos anteriores.

Ejemplos:

1. Sucesión de Fibonacci: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; F_1 = 1$ y $F_2 = 1$

Sucesiones Recursivas

Definición:

Definición: Una sucesión se define de forma **recursiva** cuando el n-ésimo término depende de algunos o todos los términos anteriores.

Ejemplos:

1. Sucesión de Fibonacci: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; F_1 = 1 \ y \ F_2 = 1$
2. $a_1 = 1$, $a_n = 3(a_{n-1} + 2)$

Sucesiones Recursivas

Definición:

Definición: Una sucesión se define de forma **recursiva** cuando el n-ésimo término depende de algunos o todos los términos anteriores.

Ejemplos:

1. Sucesión de Fibonacci: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; F_1 = 1 \ y \ F_2 = 1$
2. $a_1 = 1$, $a_n = 3(a_{n-1} + 2)$

Sucesiones Recursivas

Ejercicio: Incrementos al Salario A un vendedor recién contratado se le prometió un salario inicial de \$30 000.00, con un aumento de \$2 000.00 cada año. Sea s_n su salario en su n-ésimo año de empleo

- Determine una definición no recursiva para s_n.
- Determine una definición recursiva para s_n.
- Determine el salario del vendedor en el quinto año de empleo usando cada una de las dos definiciones anteriores

Sucesiones Infinitas

Sumas Parciales:

Nota: Para la sucesión a_1, a_2, a_3, ..., las sumas parciales son:

$\mathrm{S}_1 = a_1$ **primera suma parcial**

Sucesiones Infinitas

Sumas Parciales:

Nota: Para la sucesión a_1, a_2, a_3, ..., las sumas parciales son:

$S_1 = a_1$	**primera suma parcial**
$S_2 = a_1 + a_2$	**segunda suma parcial**

Sucesiones Infinitas

Sumas Parciales:

Nota: Para la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ las sumas parciales son:

$S_1 = a_1$	**primera suma parcial**
$S_2 = a_1 + a_2$	**segunda suma parcial**
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$	**tercera suma parcial**

Sucesiones Infinitas

Sumas Parciales:

Nota: Para la sucesión a_1, a_2, a_3, ..., las sumas parciales son:

$\mathrm{S}_1 = a_1$	**primera suma parcial**
$\mathrm{S}_2 = a_1 + a_2$	**segunda suma parcial**
$\mathrm{S}_3 = a_1 + a_2 + a_3$	**tercera suma parcial**
...	...
$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$	**n-ésima suma parcial**

Sucesiones Infinitas

Sumas Parciales:

Nota: Para la sucesión a_1, a_2, a_3, . . . , las sumas parciales son:

$\mathrm{S}_1 = a_1$	**primera suma parcial**
$\mathrm{S}_2 = a_1 + a_2$	**segunda suma parcial**
$\mathrm{S}_3 = a_1 + a_2 + a_3$	**tercera suma parcial**
$\ldots$	$\ldots$
$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$	**n-ésima suma parcial**

S_1, S_2, S_3, . . . , S_n **sucesión de sumas parciales**

Sucesiones Infinitas

Ejercicios:

1. Calcule las 4 primeras sumas parciales y la n-ésima suma parcial de la sucesión representada por $a_n = \frac{1}{2^n}$.
2. Calcule las 4 primeras sumas parciales y la n-ésima suma parcial de la sucesión representada por $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Notación de Sumatoria

Nota: La suma de los primeros n términos de la sucesión dada por $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se puede denotar por

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

donde k es el **índice de suma** o **variable de la sumatoria**.

Notación de Sumatoria

Nota: La suma de los primeros n términos de la sucesión dada por $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se puede denotar por

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

donde k es el **índice de suma** o **variable de la sumatoria**.

La expresión anterior también se puede escribir de otras formas equivalentes tales como:

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Notación de Sumatoria

Nota: La suma de los primeros n términos de la sucesión dada por $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se puede denotar por

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

donde k es el **índice de suma** o **variable de la sumatoria**.

La expresión anterior también se puede escribir de otras formas equivalentes tales como:

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$
2. $\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{8} i =$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{8} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 =$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{8} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{8} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$
2. $\sum_{k=1}^{4} k^3 =$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{8} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$

2. $\sum_{k=1}^{4} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 =$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{8} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$
2. $\sum_{k=1}^{4} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{8} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$
2. $\sum_{k=1}^{4} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$
3. $\sum_{r=3}^{5} \frac{1}{r} =$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{8} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$
2. $\sum_{k=1}^{4} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$
3. $\sum_{r=3}^{5} \frac{1}{r} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{8} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$
2. $\sum_{k=1}^{4} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$
3. $\sum_{r=3}^{5} \frac{1}{r} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{8} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$
2. $\sum_{k=1}^{4} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$
3. $\sum_{r=3}^{5} \frac{1}{r} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$
4. $\sum_{k=4}^{10} 5 =$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{8} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$
2. $\sum_{k=1}^{4} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$
3. $\sum_{r=3}^{5} \frac{1}{r} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$
4. $\sum_{k=4}^{10} 5 = 5 + 5 + 5 + \ldots + 5 =$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{8} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$
2. $\sum_{k=1}^{4} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$
3. $\sum_{r=3}^{5} \frac{1}{r} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$
4. $\sum_{k=4}^{10} 5 = 5 + 5 + 5 + \ldots + 5 = (7)5 = 35$

Notación de Sumatoria

Ejercicios: Exprese cada suma en notación de sumatoria.

1. $2 + 4 + 6 + \ldots + 20$
2. $\sqrt{\frac{1}{1^2}} + \sqrt{\frac{2}{2^2}} + \sqrt{\frac{3}{3^2}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n^2}}$
3. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots - 100x^{99}$

Notación de Sumatoria

Propiedades de las Sumas:

1. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

Notación de Sumatoria

Propiedades de las Sumas:

1. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

Notación de Sumatoria

Propiedades de las Sumas:

1. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
2. $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$
3. $\sum_{i=1}^{n}(ca_i) = c(\sum_{i=1}^{n} a_i)$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{10} (1 + (-1)^i) =$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{10}(1+(-1)^i) = \sum_{i=1}^{10} 1 + \sum_{i=1}^{10}(-1)^i =$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{10}(1+(-1)^i) = \sum_{i=1}^{10} 1 + \sum_{i=1}^{10}(-1)^i = 10 + 0 = 10$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{10}(1+(-1)^i) = \sum_{i=1}^{10} 1 + \sum_{i=1}^{10}(-1)^i = 10 + 0 = 10$

2. Dado que $\sum_{i=1}^{10} x_i = 15$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 33$,
   - $\sum_{i=1}^{10}(2x_i - \frac{1}{2}y_i - \frac{3}{2})$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{10} (1 + (-1)^i) = \sum_{i=1}^{10} 1 + \sum_{i=1}^{10} (-1)^i = 10 + 0 = 10$

2. Dado que $\sum_{i=1}^{10} x_i = 15$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 33$,
   - $\sum_{i=1}^{10}(2x_i - \frac{1}{2}y_i - \frac{3}{2})$

     $= \sum_{i=1}^{10}(2x_i) - \sum_{i=1}^{10}(\frac{1}{2}y_i) - \sum_{i=1}^{10} \frac{3}{2}$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{10}(1+(-1)^i) = \sum_{i=1}^{10} 1 + \sum_{i=1}^{10}(-1)^i = 10 + 0 = 10$

2. Dado que $\sum_{i=1}^{10} x_i = 15$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 33$,
   - $\sum_{i=1}^{10}(2x_i - \frac{1}{2}y_i - \frac{3}{2})$

     $= \sum_{i=1}^{10}(2x_i) - \sum_{i=1}^{10}(\frac{1}{2}y_i) - \sum_{i=1}^{10} \frac{3}{2}$

     $= 2\sum_{i=1}^{10} x_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} y_i - \sum_{i=1}^{10} \frac{3}{2}$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{10}(1+(-1)^i) = \sum_{i=1}^{10} 1 + \sum_{i=1}^{10}(-1)^i = 10 + 0 = 10$

2. Dado que $\sum_{i=1}^{10} x_i = 15$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 33$,
   - $\sum_{i=1}^{10}(2x_i - \frac{1}{2}y_i - \frac{3}{2})$

     $= \sum_{i=1}^{10}(2x_i) - \sum_{i=1}^{10}(\frac{1}{2}y_i) - \sum_{i=1}^{10}\frac{3}{2}$

     $= 2\sum_{i=1}^{10} x_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} y_i - \sum_{i=1}^{10}\frac{3}{2}$

     $= 2(15) - (\frac{1}{2})(33) - (10)\frac{3}{2}$

Notación de Sumatoria

Ejemplos:

1. $\sum_{i=1}^{10} (1+(-1)^i) = \sum_{i=1}^{10} 1 + \sum_{i=1}^{10} (-1)^i = 10 + 0 = 10$

2. Dado que $\sum_{i=1}^{10} x_i = 15$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 33$,
   - $\sum_{i=1}^{10}(2x_i - \frac{1}{2}y_i - \frac{3}{2})$

     $= \sum_{i=1}^{10}(2x_i) - \sum_{i=1}^{10}(\frac{1}{2}y_i) - \sum_{i=1}^{10} \frac{3}{2}$

     $= 2\sum_{i=1}^{10} x_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} y_i - \sum_{i=1}^{10} \frac{3}{2}$

     $= 2(15) - (\frac{1}{2})(33) - (10)\frac{3}{2}$

     $= -\frac{3}{2}$

Notación de Sumatoria

Ejercicio:

1. Dado que $\sum_{i=1}^{10} y_i = 33$, $y_1 = 4$, $y_{10} = 2$, determine:
    - $\sum_{i=2}^{9}(2y_i - 3)$