Trigonometría: Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo 2

Tabla de Contenido

Objetivos:

Discutiremos:

- ángulos normalizados o en posición estándar

Objetivos:

Discutiremos:

- ángulos normalizados o en posición estándar
- funciones trigonométricas de ángulos estandarizados

Objetivos:

Discutiremos:

- ángulos normalizados o en posición estándar
- funciones trigonométricas de ángulos estandarizados
- ángulo de referencia

Objetivos:

Discutiremos:

- ángulos normalizados o en posición estándar
- funciones trigonométricas de ángulos estandarizados
- ángulo de referencia
- identidades trigonométricas fundamentales

Ángulos Estandarizados

Definición de Ángulo en Posición Estándar

Definición: Un ángulo está **en posición estándar o normal** si su vértice coincide con el origen del plano cartesiano y su lado inicial coincide con la parte positiva del $eje - X$.

Nota: El lado final del ángulo puede caer en cualquier cuadrante o en cualquier eje de coordenadas.

Ángulos Estandarizados

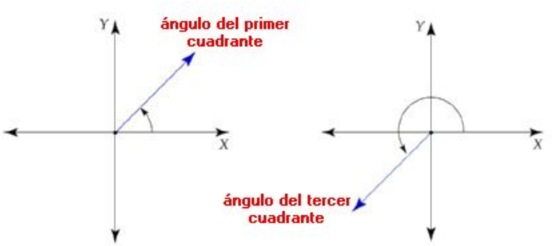

Figura: Ángulos positivos en posición estandar o normal

Ángulos Estandarizados

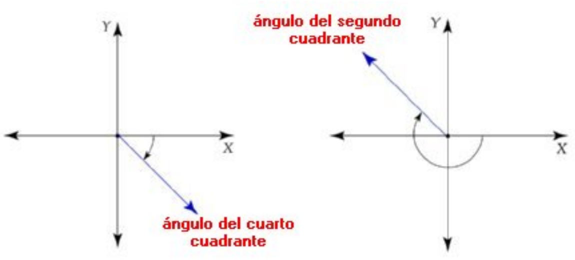

Figura: Ángulos negativos en posición estandar o normal

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

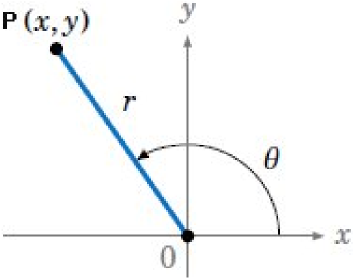

Figura: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Funciones Trigonométricas

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

Definición: Sea θ un ángulo en posición estándar y sea $P(x, y)$ un punto en el lado terminal de θ (distinto de $O(0,0)$). Sea $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distancia del punto $P(x, y)$ al origen del sistema cartesiano. Entonces, si está definida

$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{y}{r}$	$\csc(\theta) = \frac{r}{y}$
$\cos(\theta) = \frac{x}{r}$	$\sec(\theta) = \frac{r}{x}$
$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$	$\cot(\theta) = \frac{x}{y}$

Funciones Trigonométricas

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

Definición: Sea θ un ángulo en posición estándar y sea $P(x, y)$ un punto en el lado terminal de θ (distinto de $O(0,0)$). Sea $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distancia del punto $P(x, y)$ al origen del sistema cartesiano. Entonces, si está definida

$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{y}{r}$	$\csc(\theta) = \frac{r}{y}$
$\cos(\theta) = \frac{x}{r}$	$\sec(\theta) = \frac{r}{x}$
$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$	$\cot(\theta) = \frac{x}{y}$

Nota: Los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo θ no dependen del punto particular que se escoja para calcularlas; dependen únicamente de la medida del ángulo θ.

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

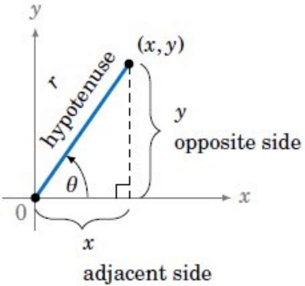

Figura: Relación entre las razones trigonométricas y las funciones trigonométricas de ángulos estandarizados

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

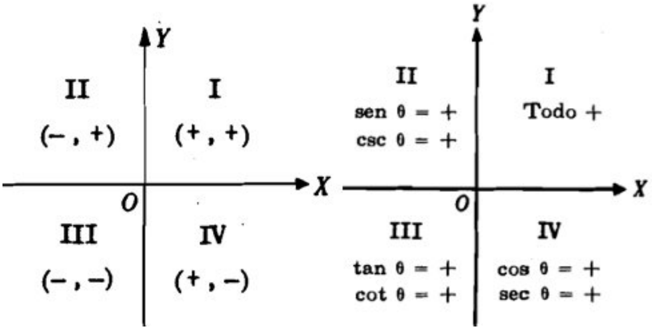

Figura: Signos de los valores de las funciones trigonométricas

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

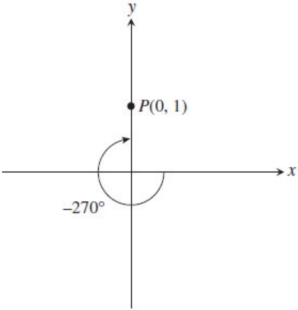

Figura: $\theta = -270°$ en forma estándar

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

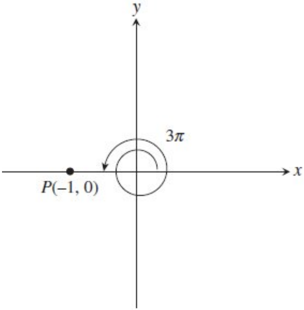

Figura: $\theta = 3\pi$ en forma estándar

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

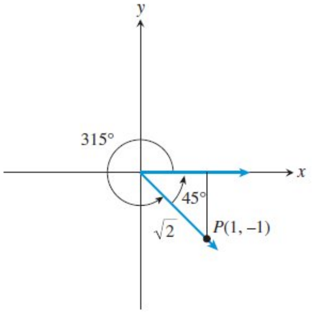

Figura: $\theta = 315°$ en forma estándar

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

Ejercicios: Determine el valor de las seis funciones trigonométricas de θ si:

1. la medida de θ es $\frac{3}{2}\pi$ radianes.
2. el lado final de θ cae sobre la línea $y = -x$.
3. $\tan(\theta) = \frac{5}{12}$ y el lado final de θ cae en el cuadrante III.
4. $\cos(\theta) = -\frac{4}{5}$

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

Definición: Un ángulo estándar es **cuadrantal** si su lado final cae encima de uno de los ejes de coordenadas.

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

Definición: Un ángulo estándar es **cuadrantal** si su lado final cae encima de uno de los ejes de coordenadas.

Ángulo de Referencia

Definición: Sea θ un ángulo en posición estándar no cuadrantal. Entonces el **ángulo de referencia** de θ es el ángulo agudo formado por el lado final de θ y el $eje - X$.

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

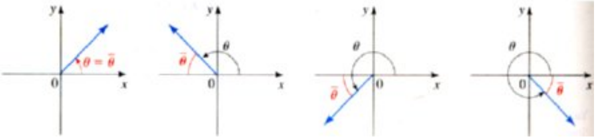

Figura: Ángulo de Referencia

Nota: El valor de una función trigonométrica de un ángulo estandarizado θ es el mismo, excepto posiblemente por el signo, que del valor de esa misma función trigonométrica de su ángulo de referencia.

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

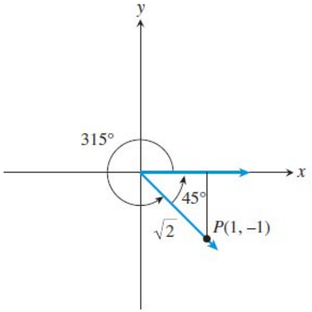

Figura: $\theta' = 45°$ es el ángulo de referencia de $\theta = 315°$

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

Ejemplo: Sea $\theta = 928°$.

- Determine un ángulo entre $0°$ y $360°$ que sea coterminal con θ. (Por lo tanto tienen los mismos valores de las funciones trigonométricas.)

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

Ejemplo: Sea $\theta = 928°$.

- Determine un ángulo entre $0°$ y $360°$ que sea coterminal con θ. (Por lo tanto tienen los mismos valores de las funciones trigonométricas.)
- Determine el ángulo de referencia de θ.

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

Ejemplo: Sea $\theta = 928°$.

- Determine un ángulo entre $0°$ y $360°$ que sea coterminal con θ. (Por lo tanto tienen los mismos valores de las funciones trigonométricas.)
- Determine el ángulo de referencia de θ.

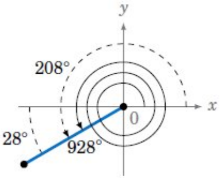

Figura: Ángulo de Referencia

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

Ejercicio: Para cada caso, determine el ángulo de referencia del ángulo θ, si θ es igual a:

1. -30°
2. 230°
3. $\frac{3}{4}\pi$
4. $-\frac{7}{9}\pi$
5. 640°
6. $\frac{25}{18}\pi$
7. -510°
8. $-\frac{5}{6}\pi$
9. 70°
10. $\frac{19}{18}\pi$

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

Ejercicio: Exprese cada caso en términos de su ángulo de referencia. **Ejemplo:** $\cos(150°) = -\cos(30°)$

1. $\operatorname{sen}(100°)$
2. $\tan(-\frac{2}{3}\pi)$
3. $\tan(200°)$
4. $\operatorname{sen}(\frac{2}{3}\pi)$
5. $\csc(\frac{7}{4}\pi)$
6. $\operatorname{sen}(-300°)$
7. $\cot(-\frac{11}{3}\pi)$
8. $\sec(264°)$

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

Ejercicio: Sin usar la calculadora, determine el valor exacto de $\operatorname{sen}(\theta)$, $\cos(\theta)$ y $\tan(\theta)$ haciendo uso del ángulo de referencia de θ, si θ es igual a:

(**Ejemplo:** $\cos(150^\circ) = -\cos(30^\circ) = -\frac{1}{2}$)

1. 750°
2. $\frac{10}{3}\pi$
3. -405°
4. $-\frac{25}{4}\pi$
5. -840°
6. $\frac{4}{3}\pi$

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales

Sea θ un ángulo estandarizado cualquiera con medida en grados o en radianes. Si ambos lados de la ecuación están definidos, entonces:

Identidades recíprocas

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen}(\theta)=\frac{1}{\csc(\theta)} & \cos(\theta)=\frac{1}{\sec(\theta)} & \tan(\theta)=\frac{1}{\cot(\theta)} \\ \csc(\theta)=\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} & \sec(\theta)=\frac{1}{\cos(\theta)} & \cot(\theta)=\frac{1}{\tan(\theta)} \end{array}$$

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales

Sea θ un ángulo estandarizado cualquiera con medida en grados o en radianes. Si ambos lados de la ecuación están definidos, entonces:

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{\csc(\theta)} \quad \cos(\theta) = \frac{1}{\sec(\theta)} \quad \tan(\theta) = \frac{1}{\cot(\theta)}$$
$$\csc(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \quad \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \quad \cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

Identidades cociente

$$\tan(\theta) = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} \quad \cot(\theta) = \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)}$$

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales

Sea θ un ángulo estandarizado cualquiera con medida en grados o en radianes. Si ambos lados de la ecuación están definidos, entonces:

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{\csc(\theta)} \quad \cos(\theta) = \frac{1}{\sec(\theta)} \quad \tan(\theta) = \frac{1}{\cot(\theta)}$$

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \quad \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \quad \cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

Identidades cociente

$$\tan(\theta) = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} \quad \cot(\theta) = \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)}$$

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales (Continuación)

Identidades pitagóricas

$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \quad 1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$

$\cot^2(\theta) + 1 = \csc^2(\theta)$

Identidades Par/Impar

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta) \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta) \quad \tan(-\theta) = -\tan(\theta)$

$\csc(\theta) = -\csc(\theta) \quad \sec(-\theta) = \sec(\theta) \quad \cot(-\theta) = -\cot(\theta)$

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales (Continuación)

Identidades pitagóricas

$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \quad 1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$

$\cot^2(\theta) + 1 = \csc^2(\theta)$

Identidades Par/Impar

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta) \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta) \quad \tan(-\theta) = -\tan(\theta)$

$\csc(\theta) = -\csc(\theta) \quad \sec(-\theta) = \sec(\theta) \quad \cot(-\theta) = -\cot(\theta)$

Nota: coseno y secante son funciones pares; las restantes son funciones impares.

Funciones Trigonométricas

Figura: Reflexión del ángulo θ con respecto al $eje - X$

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

Ejercicio: Sea θ un ángulo tal que $\cot(\theta) = -\frac{8}{15}$ y $\operatorname{sen}(\theta) < 0$. Use identidades trigonométricas fundamentales para determinar:

1. $\operatorname{sen}(\theta)$
2. $\cos(\theta)$
3. $\tan(\theta)$.

Funciones Trigonométricas de Ángulos Estandarizados

Ejercicio: Use identidades trigonométricas fundamentales para transformar el lado izquierdo de la ecuación en el lado derecho.

1. $\operatorname{sen}^2(\theta) - \cos^2(\theta) = 2\operatorname{sen}^2(\theta) - 1$
2. $\dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} + \dfrac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} = \csc(\theta)\sec(\theta)$
3. $\cot(-\theta) \times \cos(-\theta) + \operatorname{sen}(-\theta) = -\csc(\theta)$