Trigonometría: Ángulos y sus Medidas; Razones Trigonométricas

Carlos A. Rivera-Morales

Precálculo 2

Tabla de Contenido

Objetivos:

Discutiremos:

- ángulo trigonométrico

Objetivos:

Discutiremos:

- ángulo trigonométrico
- dos unidades de medidas de ángulos: grados y radianes

Objetivos:

Discutiremos:

- ángulo trigonométrico
- dos unidades de medidas de ángulos: grados y radianes
- razones trigonométricas (triángulos rectángulos)

Objetivos:

Discutiremos:

- ángulo trigonométrico
- dos unidades de medidas de ángulos: grados y radianes
- razones trigonométricas (triángulos rectángulos)
- identidades trigonométricas fundamentales

Objetivos:

Discutiremos:

- ángulo trigonométrico
- dos unidades de medidas de ángulos: grados y radianes
- razones trigonométricas (triángulos rectángulos)
- identidades trigonométricas fundamentales
- aplicaciones de las razones trigonométricas

Objetivos:

Discutiremos:

- ángulo trigonométrico
- dos unidades de medidas de ángulos: grados y radianes
- razones trigonométricas (triángulos rectángulos)
- identidades trigonométricas fundamentales
- aplicaciones de las razones trigonométricas

Ángulos Trigonométricos

Definición de Ángulo Trigonométrico

Definición: Un **ángulo trigonométrico** es la rotación que se obtiene al girar un rayo alrededor de su punto extremo (**vértice**) desde una posición inicial (**lado inicial del ángulo**) hasta una posición final o terminal (**lado final o terminal del ángulo**).

Ángulos Trigonométricos

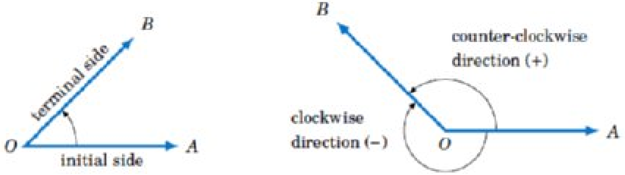


Figura: Ángulo trigonométrico

Ángulos Trigonométricos

Notas:

1. Si la rotación es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, entonces el ángulo se considera **positivo**.

Ángulos Trigonométricos

Notas:

1. Si la rotación es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, entonces el ángulo se considera **positivo**.
2. Si la rotación es en el sentido a favor al de las manecillas del reloj, entonces el ángulo se considera **negativo**.

Ángulos Trigonométricos

Notas:

1. Si la rotación es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, entonces el ángulo se considera **positivo**.
2. Si la rotación es en el sentido a favor al de las manecillas del reloj, entonces el ángulo se considera **negativo**.
3. Dos ángulos son **coterminales** si tienen el mismo lado inicial y el mismo lado terminal.

Unidades de Medidas de Ángulos

Definición de Grado

Definición: Un **grado** (1°) es la medida de un ángulo positivo con medida igual a $\frac{1}{360}$ de una revolución o vuelta completa en sentido positivo. De otra forma, $1\,rev(+) = 360^\circ$.

Unidades de Medidas de Ángulos

Definición de Grado

Definición: Un **grado** ($1°$) es la medida de un ángulo positivo con medida igual a $\frac{1}{360}$ de una revolución o vuelta completa en sentido positivo. De otra forma, $1\,rev(+) = 360°$.

Unidades de Medidas de Ángulos

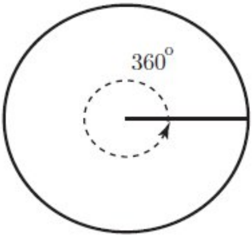


Figura: 1 rev(+) $= 360°$.

Unidades de Medidas de Ángulos

Definición de Radián

Definición: Un **radián** $(1\,rad)$ es la medida de un **ángulo central** positivo θ (ángulo con vértice en el centro de una circunferencia) que subtiende o intercepta un arco de longitud igual al radio de la circunferencia. Como consecuencia, $1\,rev(+) = 2\pi$ radianes.

Unidades de Medidas de Ángulos

Definición de Radián

Definición: Un **radián** ($1\,rad$) es la medida de un **ángulo central** positivo θ (ángulo con vértice en el centro de una circunferencia) que subtiende o intercepta un arco de longitud igual al radio de la circunferencia. Como consecuencia, $1\,rev(+) = 2\pi$ radianes.

Unidades de Medidas de Ángulos

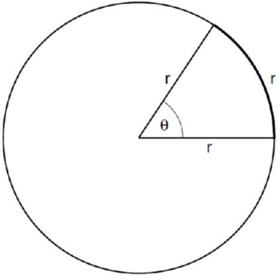


Figura: La medida del ángulo central θ es 1 radián.

Unidades de Medidas de Ángulos

Relación entre Grados y Radianes

$$1\,rev(+) = 360^\circ = 2\pi\,radianes$$

Unidades de Medidas de Ángulos

Relación entre Grados y Radianes

$1\,rev(+) = 360^\circ = 2\pi\,radianes$

$180^\circ = \pi\,radianes$

Unidades de Medidas de Ángulos

Relación entre Grados y Radianes

$1\,rev(+) = 360^\circ = 2\pi\,radianes$

$180^\circ = \pi\,radianes$

$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,rad$

Unidades de Medidas de Ángulos

Relación entre Grados y Radianes

$1\, rev(+) = 360^\circ = 2\pi\, radianes$

$180^\circ = \pi\, radianes$

$1^\circ = \frac{\pi}{180}\, rad$

$1\, rad = (\frac{180}{\pi})^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$

Unidades de Medidas de Ángulos

Ejercicios: Convierta a radianes:

1) $30^\circ =$	**16)** $70^\circ =$
2) $60^\circ =$	**17)** $150^\circ =$
3) $90^\circ =$	**18)** $-500^\circ =$
4) $-60^\circ =$	**19)** $3600^\circ =$
5) $45^\circ =$	**20)** $720^\circ =$
6) $-90^\circ =$	**21)** $900^\circ =$
7) $180^\circ =$	**22)** $540^\circ =$
8) $270^\circ =$	**23)** $-400^\circ =$
9) $300^\circ =$	**24)** $450^\circ =$
10) $120^\circ =$	**25)** $606^\circ =$
11) $-150^\circ =$	**26)** $-390^\circ =$
12) $210^\circ =$	**27)** $1080^\circ =$
13) $330^\circ =$	**28)** $940^\circ =$
14) $240^\circ =$	**29)** $600^\circ =$
15) $100^\circ =$	**30)** $333^\circ =$

Unidades de Medidas de Ángulos

Ejercicios: Convierta a grados:

1) $\frac{\pi}{3} =$

2) $\frac{\pi}{2} =$

3) $\frac{2\pi}{3} =$

4) $\frac{3}{2}\pi =$

5) $-\frac{4\pi}{3} =$

6) $\frac{7}{11}\pi =$

7) $\frac{1}{6}\pi =$

8) $-\frac{3}{4}\pi =$

9) $\frac{2}{5}\pi =$

10) $2\pi =$

11) $4\pi =$

12) $\frac{4\pi}{9} =$

13) $-\pi =$

14) $\frac{7}{6}\pi =$

15) $\frac{5\pi}{3} =$

16) $\frac{9\pi}{2} =$

17) $2,64 =$

18) $-1,55 =$

19) $4,02 =$

20) $3,47 =$

21) $4,99 =$

22) $-0,85 =$

23) $3,14 =$

24) $-1,09 =$

25) $0,46 =$

26) $7,08 =$

27) $-10,54 =$

28) $7 =$

29) $-9 =$

30) $5 =$

Unidades de Medidas de Ángulos

Trigonometría del Triángulo Rectángulo

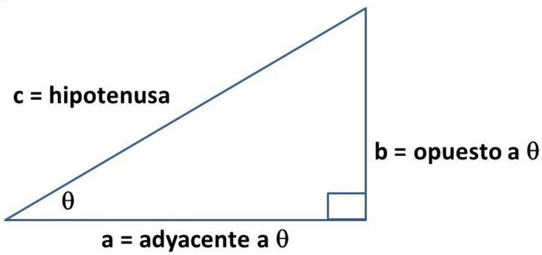


Figura: Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

Funciones Trigonométricas

Razones Trigonométricas

Definición: Sea θ un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. Entonces, las seis **razones trigonométricas** de θ se definen como sigue:

Funciones Trigonométricas

Razones Trigonométricas

Definición: Sea θ un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. Entonces, las seis **razones trigonométricas** de θ se definen como sigue:

$\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{opuesto}{hipotenusa}$	$\csc(\theta) = \dfrac{hipotenusa}{opuesto}$
$\cos(\theta) = \dfrac{adyacente}{hipotenusa}$	$\sec(\theta) = \dfrac{hipotenusa}{adyacente}$
$\tan(\theta) = \dfrac{opuesto}{adyacente}$	$\cot(\theta) = \dfrac{adyacente}{opuesto}$

Funciones Trigonométricas

Razones Trigonométricas

Definición: Sea θ un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. Entonces, las seis **razones trigonométricas** de θ se definen como sigue:

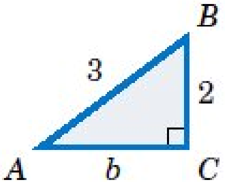
$\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{opuesto}{hipotenusa}$	$\csc(\theta) = \dfrac{hipotenusa}{opuesto}$
$\cos(\theta) = \dfrac{adyacente}{hipotenusa}$	$\sec(\theta) = \dfrac{hipotenusa}{adyacente}$
$\tan(\theta) = \dfrac{opuesto}{adyacente}$	$\cot(\theta) = \dfrac{adyacente}{opuesto}$

Nota: Los valores de las razones trigonométricas de un ángulo agudo θ no dependen del triángulo rectángulo que se utilice para calcularlas; dependen únicamente del la medida del ángulo θ.

Funciones Trigonométricas: Aplicaciones

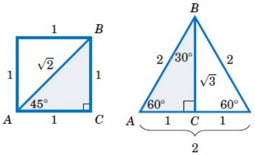
Ejercicio: Si A es un ángulo agudo tal que $\operatorname{sen}(A) = \frac{2}{3}$.

1. Determine los valores de las otras funciones de A.
2. Determine las medidas de los ángulos A, B y C.



Triángulos y Angulos Especiales

Triángulos y Ángulos Especiales



Grados	0°	30°	45°	60°	90°
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{sen}(\theta)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(\theta)$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	no definida

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{\csc(\theta)} \qquad \cos(\theta) = \frac{1}{\sec(\theta)} \qquad \tan(\theta) = \frac{1}{\cot(\theta)}$$

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \qquad \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \qquad \cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{\csc(\theta)} \quad \cos(\theta) = \frac{1}{\sec(\theta)} \quad \tan(\theta) = \frac{1}{\cot(\theta)}$$

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \quad \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \quad \cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

Identidades cociente

$$\tan(\theta) = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} \quad \cot(\theta) = \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)}$$

Funciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas Fundamentales

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{\csc(\theta)} \quad \cos(\theta) = \frac{1}{\sec(\theta)} \quad \tan(\theta) = \frac{1}{\cot(\theta)}$$

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \quad \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \quad \cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

Identidades cociente

$$\tan(\theta) = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} \quad \cot(\theta) = \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)}$$

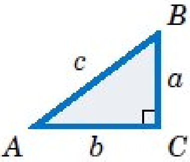
Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \quad 1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$$

$$\cot^2(\theta) + 1 = \csc^2(\theta)$$

Funciones Trigonométricas: Aplicaciones

Ejercicio: Determine los valores de las seis funciones trigonométricas de los ángulos A y B en el $\triangle\ ABC$ dado.



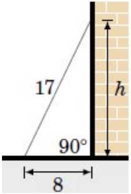
1. $a = 5, b = 12, c = 13$
2. $a = 8, b = 15, c = 17$
3. $a = 7, b = 24, c = 25$
4. $a = 20, b = 21, c = 29$
5. $a = 9, b = 40, c = 41$
6. $a = 1, b = 2, c = \sqrt{5}$
7. $a = 1, b = 3$
8. $a = 2, b = 5$
9. $a = 5, c = 6$
10. $b = 7, c = 8$

Funciones Trigonométricas: Aplicaciones

Ejercicio: En los ejercicios siguientes calcule los valores trigonométricos restantes del ángulo agudo A.

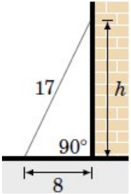
11. $\sin A = \frac{3}{4}$	**12.** $\cos A = \frac{2}{3}$	**13.** $\cos A = \frac{2}{\sqrt{10}}$	**14.** $\sin A = \frac{2}{4}$
15. $\tan A = \frac{5}{9}$	**16.** $\tan A = 3$	**17.** $\sec A = \frac{7}{3}$	**18.** $\csc A = 3$

Funciones Trigonométricas: Aplicaciones



Ejercicio: La parte inferior de una escalera de 17 pies de longitud está a 8 pies de la base de una pared.

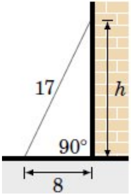
Funciones Trigonométricas: Aplicaciones

Ejercicio: 

La parte inferior de una escalera de 17 pies de longitud está a 8 pies de la base de una pared.

1. ¿A qué altura la parte superior de la escalera toca la pared?

Funciones Trigonométricas: Aplicaciones



Ejercicio: La parte inferior de una escalera de 17 pies de longitud está a 8 pies de la base de una pared.

1. ¿A qué altura la parte superior de la escalera toca la pared?
2. Determine la medida, en grados y en radianes, de los ángulos agudos del triángulo rectángulo formado por la escalera y la pared.

Funciones Trigonométricas: Aplicaciones

Ángulo de Elevación; Ángulo de Depresión

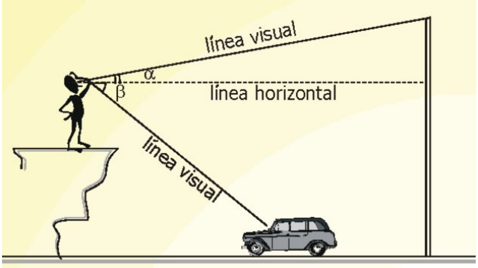


Figura: α : Ángulo de elevación; β : Ángulo de depresión

Funciones Trigonométricas: Aplicaciones

Ángulos de elevación y depresión

Definición:

- Cuando el objeto observado se encuentra por encima de la línea horizontal, el **ángulo de elevación** α es el ángulo formado por la línea visual y la línea horizontal.

Funciones Trigonométricas: Aplicaciones

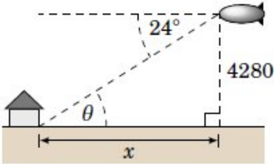
Ángulos de elevación y depresión

Definición:

- Cuando el objeto observado se encuentra por encima de la línea horizontal, el **ángulo de elevación** α es el ángulo formado por la línea visual y la línea horizontal.
- Cuando el objeto observado se encuentra por debajo de la línea horizontal, el **ángulo de depresión** β es el ángulo formado por la línea visual y la línea horizontal.

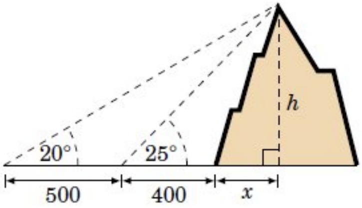
Funciones Trigonométricas: Aplicaciones

Ejercicio: Un dirigible está a una altura de 4280 pies sobre el nivel del suelo y el ángulo de depresión desde su línea horizontal de visión a la base de una casa en el suelo es de 24°. Bajo la suposición de que el suelo es completamente llano, ¿cuál es la distancia x a lo largo del suelo del dirigible a la base de la casa?



Funciones Trigonométricas: Aplicaciones

Ejercicio: Desde un punto sobre el suelo a 400 pies de la base de una montaña el ángulo de elevación al tope de la montaña es de 25°. A 500 pies directamente hacia atrás, el ángulo de elevación es de 20°. Determine la altura de la montaña.



Funciones Trigonométricas: Aplicaciones

Nota: La fórmula de *la medida en radianes* de un ángulo, $\theta = \frac{s}{r}$ se puede utilizar para mediar la longitud s de un arco de circunferencia.

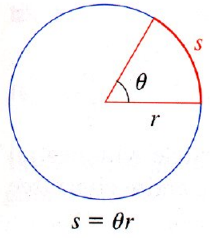


Figura: $s = \theta r, \theta$ en radianes

Funciones Trigonométricas: Aplicaciones

Nota: El área A de un sector de un círculo con ángulo central θ, en radianes, está dado por: $A = \frac{1}{2}r^2\theta$.

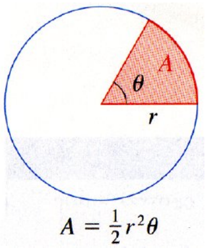


Figura: Sector circular con ángulo central θ

Funciones Trigonométricas: Aplicaciones

Ejercicio: Suponga que el radio es 5 y determine la longitud de arco, correcta a dos lugares decimales, si el ángulo central mide:

- 1.2 radianes
- $\frac{\pi}{2}$ radianes
- 45°

Ejercicio: Determine el área, correcta a dos lugares decimales, para cada uno de los sectores circulares del ejercicio anterior.

Ángulos y sus Medidas: Aplicaciones

Considere una partícula que se mueve a velocidad constante, a lo largo de un arco de radio r.

Velocidad lineal

Definición: Si s es la longitud del arco recorrida en el tiempo t, entonces la **velocidad lineal**, v, de la partícula es

$$\text{Velocidad lineal } v = \frac{\mathit{longitud\,de\,arco}}{\mathit{tiempo}} = \frac{s}{t}$$

Ángulos y sus Medidas: Aplicaciones

Considere una partícula que se mueve a velocidad constante, a lo largo de un arco de radio r.

Velocidad angular

Definición: Si θ es el ángulo, medido en radianes, que corresponde a la longitud de arco s, entonces la **velocidad angular**, ω, de la partícula es

$$\text{Velocidad angular } \omega = \frac{\textit{medida del ángulo central}}{\textit{tiempo}} = \frac{\theta}{t}$$

Ángulos y sus Medidas: Aplicaciones

Ejemplo: Una bolita gira a razón de 15 revoluciones cada 10 segundos en una ruleta de casino. Suponga que la distancia en cualquier momento entre la bolita y el centro de la ruleta es de 3 pies.

- Determine la velocidad lineal y angular de la bolita.

Ángulos y sus Medidas: Aplicaciones

Solución: La distancia s recorrida por la piedra en 10 seg es $s = 15 \times 2\pi r = 15 \times 2\pi \times 3 = 90\pi\, pies$. Por lo tanto, la velocidad lineal de la bolita es

$$v = \frac{s}{t} = \frac{90\pi\, pies}{10\, seg} = 9\pi \frac{pies}{seg}$$

En 10 segundos, el ángulo θ cambia en $15(2\pi) = 30\pi$ radianes. Por lo tanto la velocidad angular de la bolita es

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{30\pi\, rad}{10\, seg} = 3\pi \frac{rad}{seg}$$

Ángulos y sus Medidas: Aplicaciones

Ejercicio: Un ventilador de techo con aspas de 16 pulg de longitud gira a 45 revoluciones por minuto.

- Determine la velocidad angular del ventilador en radianes por minuto.
- Determine la velocidad lineal de las puntas de las aspas en pulgadas por minuto.

Ángulos y sus Medidas: Aplicaciones

Subunidades de la unidad grado (°)

$1^\circ = 60\, minutos = 60'$
$1' = 60\, segundos = 60"$

Ejercicio: Convierta cada medida del ángulo en grados decimales.
a) $30^\circ 20' 36"$ $b) - 450^\circ 18' 47"$ $c)\, 85^\circ 34' 15"$

Ejercicio: Convierta cada medida del ángulo a la forma G°$M'S"$(grados, minutos y segundos).
a) $345{,}68^\circ$ $b) - 23{,}335^\circ$ $c)\, 0{,}7654^\circ$

Alfabeto Griego

Nombre en griego	Nombre en castellano	Minúscula	Mayúscula	Sonido
ἄλφα	alfa	α	Α	a
βῆτα	beta	β	Β	b
γάμμα	gamma	γ	Γ	g (ga, gue, gui, go, gu)*
δέλτα	delta	δ	Δ	d
ἔ ψυλόν	épsilon	ε	Ε	e (breve)
ζῆτα	dseta	ζ	Ζ	ds
ἦτα	eta	η	Η	e (larga)
θῆτα	zeta	θ	Θ	z (za, ce, ci, zo, zu)
ἰῶτα	iota	ι	Ι	i (¡ojo! , la iota sin punto)
κάππα	capa	κ	Κ	k (ca, ke, ki, co, cu)
λάμβδα	lambda	λ	Λ	l
μῦ	mi	μ	Μ	m
νῦ	ni	ν	Ν	n
ξῖ	xi	ξ	Ξ	x (ks)
ὂ μικρόν	ómicron	ο	Ο	o (breve)
πῖ	pi	π	Π	p
ῥῶ	ro	ϱ	Ρ	r
σῖγμα	sigma	σ / -ς	Σ	s
ταῦ	tau	τ	Τ	t
ὒ ψιλόν	ípsilon	υ	ϒ	u francesa / ü alemana*
φῖ	fi	φ	Φ	f
χῖ	ji	χ	Χ	j
ψῖ	psi	ψ	Ψ	ps
ὦ μέγα	omega	ω	Ω	o (larga)